

단원 종합 평가

1. $x^2 + 4x + 4 = 0$ 을 풀면? [배점 3, 중하]

- ① $x = -2$ (중근) ② $x = -3$ (중근)
 ③ $x = 5$ (중근) ④ $x = 1$ (중근)
 ⑤ $x = 3$ (중근)

해설

$$(x+2)^2 = 0, x+2=0, x=-2 \text{ (중근)}$$

2. x 에 관한 이차방정식 $(x-p)^2 = k$ 가 서로 다른 두 개의 근을 가질 조건은? [배점 3, 중하]

- ① $p \geq 0$ ② $p < 0$ ③ $k > 0$
 ④ $k < 0$ ⑤ $k \geq 0$

해설

$(x-p)^2 = k, x-p = \pm\sqrt{k}, x = p \pm \sqrt{k}$
 서로 다른 두 근을 가지려면 근호 안의 수가 양수
 여야 한다.
 $\therefore k > 0$

3. 이차방정식 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근을 p, q 라 할 때, $p^2 + pq + q^2$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 19

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ 의 두 근을 } p, q \text{ 라면} \\ p+q=4, pq=-3 \\ p^2 + pq + q^2 \\ = (p+q)^2 - pq \\ = 4^2 + 3 = 16 + 3 = 19 \end{aligned}$$

4. 이차방정식 $3x^2 - 4x - 2 = 0$ 의 해가 $x = \frac{2 \pm \sqrt{k}}{3}$ 일 때, k 의 값은? [배점 3, 중하]

- ① 50 ② 40 ③ 30 ④ 20 ⑤ 10

해설

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

5. 이차방정식 $(x+3)^2 = 4x+9$ 를 인수분해를 이용하여 풀면?

[배점 4, 중중]

- ① $x = 0$ 또는 $x = 3$
 ② $x = 0$ 또는 $x = -3$
 ③ $x = 0$ 또는 $x = -2$
 ④ $x = 0$ 또는 $x = 2$
 ⑤ $x = -2$ 또는 $x = -3$

해설

방정식을 정리하면 $x^2 + 2x = 0$

$$x(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 0, -2$$

6. 이차방정식 $ax^2 + bx - 7 = 0$ 의 한 근을 p 라고 할 때, $ap^2 + bp + 4$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

주어진 식에 x 대신 p 를 대입하면

$$ap^2 + bp = 7$$

$$ap^2 + bp + 4 = 7 + 4 = 11$$

7. 구청에서 매달 2째, 4째 주 수요일에만 컴퓨터 수업을 한다. 어느 달에 수업한 수요일의 날짜의 곱이 176 일 때, 이 달에 4째 주 수요일의 날짜는?

[배점 4, 중중]

- ① 8 일 ② 15 일 ③ 18 일

- ④ 22 일 ⑤ 29 일

해설

2째 주 수요일과 4째 주 수요일의 날짜를 각각 $x - 4$, x 일이라 하면,

$$x(x - 14) = 176$$

$$x^2 - 14x - 176 = 0$$

$$(x - 22)(x + 8) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } 22 \text{ 일}$$

8. 가로와 세로의 길이가 3 : 4 이고, 넓이가 72cm^2 인 직사각형의 세로의 길이를 구하여라 [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $4\sqrt{6}\text{cm}$

해설

두 변의 길이를 각각 $3k$, $4k$ 라고 하면

$$(3k) \times (4k) = 72, 12k^2 = 72, k^2 = 6, k = \pm\sqrt{6}$$

$$k > 0$$

$$\text{이므로 } k = \sqrt{6}$$

$$\therefore \text{세로의 길이는 } 4\sqrt{6}\text{cm}$$

9. 이차방정식 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근 중에서 양수를 a 라 할 때, $n < a < n + 1$ 을 만족하는 정수 n 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \text{ 의 두 근은 } x = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$a \text{ 는 양수이므로 } a = -2 + \sqrt{5}$$

$$0 < -2 + \sqrt{5} < 1 \therefore n = 0$$

10. 부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 만족시키는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근일 때, $a^2 - b^2$ 의 값을 구하면? [배점 5, 중상]

- ① 61 ② 51 ③ 11

- ④ -11 ⑤ -61

해설

부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 풀면 다음과 같다.

$$4 \leq 2x < 7$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2} \therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = -5, b = 6$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-5)^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$$

11. $A = \{1, 2, a^2 - 6a + 11\}$, $B = \{a - 2, a - 1, a, a + 1, a + 2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때, a 의 값을 구하면?

[배점 5, 중상]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로

$$a^2 - 6a + 11 = 3, a^2 - 6a + 8 = 0$$

$$(a - 2)(a - 4) = 0$$

$$\therefore a = 2, a = 4$$

$a = 2$ 이면 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 이고

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$ 이므로 조건에 부적합하다.

$$\therefore a = 4$$

12. 이차방정식 $(x - 1)(x - b) = -1$ 이 0이 아닌 중근 a 를 가진다. 이때, b 의 값은? (단, a, b 는 정수)

[배점 5, 중상]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(x - 1)(x - b) = -1$ 이 중근 a 를 가지므로 x 에 a 를 대입하면

$$(a - 1)(a - b) = -1$$

i) $a - 1 = -1$, $a - b = 1$ 인 경우

$$a = 0, b = -1, a \neq 0 \text{이므로 부적합}$$

ii) $a - 1 = 1$, $a - b = -1$ 인 경우

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore b = 3$$

13. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 $\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4$ 이라 한다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

[배점 5, 중상]

- ① 100 ② 120 ③ 240

- ④ -120 ⑤ -100

해설

$\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4$ 를 정리하면,

$$(a - 20)x^2 + (2 + 4c)x + b - 12 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한 항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 20 = 0, 2 + 4c = 0, b - 12 = 0$$

$$\therefore a = 20, b = 12, c = -\frac{1}{2}$$

$$abc = 20 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -120$$

14. 원가가 1800 원인 인형이 있다. $a\%$ 의 이익을 붙여서 정가를 정하였다가 할인기간에 정가의 $2a\%$ 를 받고 팔았더니 396 원의 손해를 보았다. 이때, a 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} \text{정가} &: 1800 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right) \text{ 원} \\ 1800 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right) \times \frac{2a}{100} + 396 &= 1800 \\ 36a + \frac{9}{25}a^2 + 396 &= 1800 \\ a^2 + 100a - 3900 &= 0 \\ (a - 30)(a + 130) &= 0 \\ \therefore a &= 30 (a > 0) \end{aligned}$$

15. 지면에서 초속 25m 로 똑바로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = 25t - 5t^2$ 인 관계가 있다고 한다. 공이 20m 이상의 높이에서 머무는 시간을 A 라고 할 때, A 의 값은?

[배점 5, 중상]

- ① 1 초 ② 2 초 ③ 3 초
④ 4 초 ⑤ 5 초

해설

$$\begin{aligned} 25t - 5t^2 &= 20 \\ 5t^2 - 25t + 20 &= 5(t^2 - 5t + 4) = 5(t - 4)(t - 1) = 0 \\ \therefore t &= 1, 4 \\ \therefore A &= 4 - 1 = 3 \text{ (초)} \end{aligned}$$

16. 이차방정식 $x^2 + 2x + A = 0$ 의 근이 $x = 2$ 또는 $x = -4$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

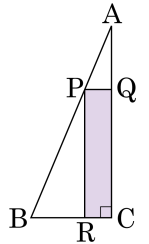
[배점 5, 상하]

- ① -8 ② -6 ③ -2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} (x - 2)(x + 4) &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0, A = -8 \end{aligned}$$

17. 다음 그림과 같이 $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AC} = 36$, $\overline{BC} = 15$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위의 한 점 P 에서 나머지 변에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라고 하자. 사각형 PQCR 의 넓이가 120 일 때, 선분 BR 의 길이를 구하여라. (단, $\overline{BR} > \overline{RC}$)



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned} \triangle APQ \text{ 와 } \triangle ABC \text{ 가 닮음이므로} \\ \overline{PQ} = x \text{ 라 하면 } \overline{AQ} &= \frac{12}{5}x \\ \overline{QC} &= 36 - \frac{12}{5}x \\ \text{따라서 } x \left(36 - \frac{12}{5}x\right) &= 120 \\ x^2 - 15x + 50 &= 0 \\ (x - 10)(x - 5) &= 0 \\ x > 0 \text{ 이므로 } x &= 10 \text{ 또는 } x = 5 \\ \overline{RC} &= 5 \text{ 또는 } 10 \\ \overline{RC} = 5 \text{ 일 때, } \overline{BR} &= 15 - 5 = 10 \\ \overline{RC} = 10 \text{ 일 때, } \overline{BR} &= 15 - 10 = 5 \\ \therefore \overline{BR} > \overline{RC} \text{ 이므로 } \overline{BR} &= 10 \end{aligned}$$

18. 주사위 한 개를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a , 두 번째 나온 눈의 수를 b 라 할 때, 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되는 경우의 수는 얼마인지 구하여라. (단, 증근은 두 근으로 본다.)
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7개

해설

이차방정식의 정수근을 α, β 라 하면,
 $x^2 - ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$
 $a = 2$ 일 때, $b = 1$
 $a = 3$ 일 때, $b = 2$
 $a = 4$ 일 때, $b = 3, 4$
 $a = 5$ 일 때, $b = 4, 6$
 $a = 6$ 일 때, $b = 5$
 그러므로 두 근이 모두 정수가 되는 순서쌍은
 (2, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 4), (5, 4), (5, 6), (6, 5)
 의 7개

19. 서로 다른 두 실수 p, q 가 $p^2 + ap + b = 0, q^2 + aq + b = 0$ 을 만족할 때,
 집합 $X = \{x \mid x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0, x \text{는 실수}\}$ 에 대하여 $n(X)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

서로 다른 두 실수 p, q 가 $p^2 + ap + b = 0, q^2 + aq + b = 0$ 을 만족하므로
 $x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근을 가진다.
 따라서 $D = a^2 - 4b > 0 \dots \textcircled{1}$
 $x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 에서
 $D = (a - 2c)^2 - b(b - ac) = a^2 + 4c^2 - 4b$
 그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $a^2 - 4b > 0$ 이고 $4c^2 \geq 0$ 이므로
 $a^2 + 4c^2 - 4b > 0$
 따라서 $x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 에서 $D > 0$
 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.
 $\therefore n(X) = 2$

20. 이차방정식 $\frac{a-3}{2}x^2 + ax + a + 2 = 0$ 이 서로 다른 두 근을 갖도록 하는 정수 a 의 최솟값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{a-3}{2}x^2 + ax + a + 2 = 0$ 에서
 $(a-3)x^2 + 2ax + 2a + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 근을 가지므로
 $\frac{D}{4} = a^2 - (a-3)(2a+4) > 0$
 $a^2 - 2a - 12 < 0$
 $\therefore 1 - \sqrt{13} < a < 1 + \sqrt{13}$ (단, $a \neq 3$)
 $\therefore 1 - \sqrt{13} < a < 3$ 또는 $3 < a < 1 + \sqrt{13}$
 이때 정수 a 의 최솟값은 $1 - \sqrt{13} < -2$ 이므로
 $a = -2$ 이다.

21. 이차방정식 $x^2 - 6x + (a - 1) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a 값을 모두 더한 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x^2 - 6x = -a + 1, x^2 - 6x + 9 = -a + 10,$
 $(x - 3)^2 = -a + 10$
 $x - 3 = \pm\sqrt{-a + 10}, x = 3 \pm \sqrt{10 - a}$
 두 근이 정수가 되려면 $10 - a$ 가 제곱수가 되어야 하므로
 $10 - a = 9, 4, 1$ 에서 $a = 1, 6, 9$
 a 값 들의 합은 $1 + 6 + 9 = 16$

22. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라. (단 $x > y$) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2개

해설

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}, xy = 2(x+y)$
 $xy - 2(x+y) = 0, xy - 2(x+y) + 4 = 4$
 $xy - 2x - 2y + 4 = 4, x(y-2) - 2(y-2) = 4$
 $(x-2)(y-2) = 4$ 그런데 x, y 는 정수이므로

$x-2$	1	2	4	-1	-2	-4
$y-2$	4	2	1	-4	-2	-1
x	3	4	6	1	0	-2
y	6	4	3	-2	0	1

$x \neq 0, y \neq 0$ 이고 $x > y$ 이므로
 구하는 (x, y) 는 $(6, 3), (1, -2)$

23. 사과 120 개를 몇 명의 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 사람에게 돌아가는 사과의 수는 학생 수보다 2 만큼 작다. 학생 수를 구하여라. [배점 6, 상중]

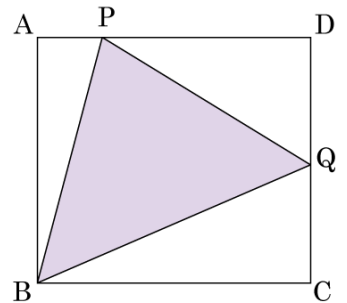
▶ 답 :

▷ 정답 : 12명

해설

학생 수를 x , 사과 수를 $x - 2$ 라고 하면
 $x(x - 2) = 120$
 $x^2 - 2x - 120 = 0$
 $(x - 12)(x + 10) = 0$
 $x = 12$ 또는 $x = -10$
 $\therefore x = 12$

24. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 에서 점 P 는 선분 AD 위에 있고, 점 Q 는 선분 CD 위에 있다. 삼각형 ABP, PDQ, BCQ 의 넓이가 각각 2.5, 4.5, 4 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이를 구하여라. [배점 6, 상중]



▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned}
 \overline{AD} &= x, \overline{AB} = y \text{ 라 하면} \\
 \triangle ABP &= \frac{1}{2}y \times \overline{AP} = 2.5 \quad \therefore \overline{AP} = \frac{5}{y} \\
 \triangle BCQ &= \frac{1}{2}x \times \overline{QC} = 4 \quad \therefore \overline{QC} = \frac{8}{x} \\
 \text{따라서 } \triangle PQD &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{y} \right) \left(y - \frac{8}{x} \right) = 4.5 \\
 \left(\frac{xy-5}{y} \right) \left(\frac{xy-8}{x} \right) &= 9 \\
 (xy-5)(xy-8) &= 9xy \\
 (xy)^2 - 22xy + 40 &= 0 \\
 (xy-2)(xy-20) &= 0 \\
 \therefore xy &= 2 \text{ 또는 } xy = 20 \\
 \text{그런데 } xy > 11 \text{ 이므로 } xy &= 20 \\
 \therefore \triangle PBQ &= 20 - 11 = 9
 \end{aligned}$$

25. 이차방정식 $m^2x^2 - n^2x = 1$ 이 서로 다른 두 정수를 근으로 가질 때, n 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}
 m^2x^2 - n^2x - 1 &= 0 \text{ 에서} \\
 \text{서로 다른 두 정수근을 } \alpha, \beta (\alpha \neq \beta) \text{ 라 하면} \\
 \alpha + \beta &= \frac{n^2}{m^2}, \alpha\beta = -\frac{1}{m^2} \\
 \text{이때, } \alpha, \beta \text{ 가 정수이므로 } \alpha\beta &= -\frac{1}{m^2} \text{ 도 정수이} \\
 \text{다.} \\
 \therefore m &= 1 \text{ 또는 } m = -1 \\
 \text{따라서 } \alpha\beta &= -1 \text{ 에서 } \alpha = 1, \beta = -1 \text{ 또는} \\
 \alpha &= -1, \beta = 1 \\
 \alpha + \beta &= \frac{n^2}{m^2} \text{ 이므로} \\
 \frac{n^2}{m^2} &= 0 \quad \therefore n = 0
 \end{aligned}$$