

단원 종합 평가

1. $\sqrt{27} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{6} \right) - \sqrt{18} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ 일 때,
 $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

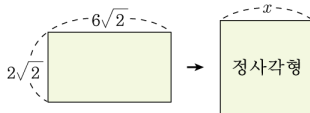
해설

$$\begin{aligned} \sqrt{27} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{6} \right) - \sqrt{18} \\ = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ = -3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

따라서 $a + b = -3 + 2 = -1$ 이다.

2. 가로 길이가 $6\sqrt{2}$ 이고, 세로 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 직사각형과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이 x 를 $a\sqrt{b}$ 의 꼴로 나타내어라. (단, b 는 제곱인 인수가 없는 자연수)



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

직사각형의 넓이는 $6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 24$ 이다.

따라서 $x^2 = 24$ 이므로 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 이다.

3. $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{c}{d}$ 이고 $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{5}$ 일 때, $(a-b)(c+d)$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$, $d > 0$)

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\frac{d}{c} = \frac{c}{d} \text{ 에서 } \frac{d}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{d} \text{ 이면 } d = \sqrt{5}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \text{ 에서 } \frac{a}{\sqrt{3}} = 1 \text{ 이면 } a = \sqrt{3}$$

$$\therefore (a-b)(c+d) = (\sqrt{3}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{5}) = 0(\sqrt{5}+\sqrt{5}) = 0$$

4. $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 $N(x)$ 라고 하면, $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $N(5) = 2$ 이다.

이 때, $N(1) + N(2) + N(3) + \dots + N(10)$ 의 값은?

[배점 4, 중중]

① -10

② 14

③ 16

④ 19

⑤ 25

해설

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3 \text{ 이므로}$$

$$N(1) = N(2) = N(3) = 1$$

$$N(4) = N(5) = \dots = N(8) = 2$$

$$N(9) = N(10) = 3$$

$$\therefore 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 2 = 19$$

5. $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 $N(x)$ 라고 하면 $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $N(5) = 2$ 이다.
이 때, $N(8) + N(9) + \cdots + N(19) + N(20)$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 43

해설

$\sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$ 이므로

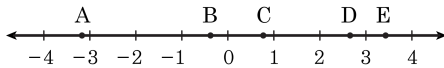
$N(8) = 2$

$N(9), N(10), \cdots, N(15) = 3$

$N(16), N(17), \cdots, N(20) = 4$

$\therefore N(8) + N(9) + \cdots + N(19) + N(20) = 2 + 3 \times 7 + 4 \times 5 = 43$

6. 아래 수직선 위의 점 A, B, C, D, E 와 보기의 수가 잘못 연결된 것을 모두 고르면?



보기

$-\sqrt{9}, 1 - \sqrt{2}, \sqrt{7}, \frac{2}{3}, -\sqrt{3} + 5$

[배점 4, 중중]

① A : $-\sqrt{9}$

② B : $-\sqrt{3} + 5$

③ C : $\frac{2}{3}$

④ D : $\sqrt{7}$

⑤ E : $1 - \sqrt{2}$

해설

$-\sqrt{9} = -3$

$-2 < -2\sqrt{2} < -1$ 이므로 $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$

$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ 이므로 $2 < \sqrt{7} < 3$

$-2 < -\sqrt{3} < -1$ 이므로 $3 < -\sqrt{3} + 5 < 4$

7. 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수 전체의 집합을 각각 N, Z, Q, I, R 라 할 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, R 은 전체집합이다.)

보기

㉠ $(Q^c \cup I) \subset I$

㉡ $Z^c \cap N = \emptyset$

㉢ $R - Q = Z$

㉣ $I^c \cup Q^c = R$

㉤ $N \subset (R - Q)$

㉥ $N \subset Z \subset I \subset R$

㉦ $I - N = I$

[배점 4, 중중]

① ㉠, ㉡

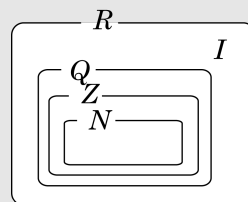
② ㉠, ㉡, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉣, ㉦

④ ㉠, ㉡, ㉣, ㉤, ㉦

⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉤, ㉥, ㉦

해설



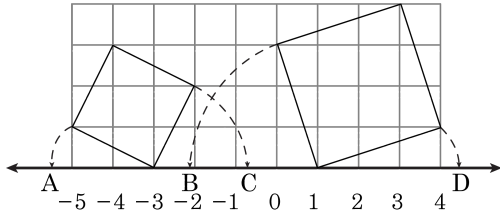
$R - Q = Z \rightarrow R - Q = I$

$N \subset (R - Q) = N \not\subset I$

$N \subset Z \subset Q \subset R \rightarrow I \subset R, N \subset Z \subset R,$

$N \not\subset I, Z \not\subset I$

8. 다음 그림의 수직선 위의 점 A, B, C, D 에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때, $(b+d) - (a+c)$ 값을 구하여라. (단, 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1 인 정사각형이다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8

해설

- (1) 작은 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{5}$
 $\therefore a = -3 - \sqrt{5}, c = -3 + \sqrt{5}$
 (2) 큰 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{10}$
 $\therefore b = 1 - \sqrt{10}, d = 1 + \sqrt{10}$
 $\therefore b + d = 1 - \sqrt{10} + 1 + \sqrt{10} = 2$
 $\therefore a + c = -3 - \sqrt{5} + (-3 + \sqrt{5}) = -6$
 따라서 $(b+d) - (a+c) = 2 - (-6) = 8$ 이다.

9. $5x + y = 15$ 일 때, $\sqrt{2x+y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 자연수 x 는? [배점 5, 중상]

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$5x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 5x$$

$$\sqrt{2x+y} = \sqrt{2x+15-5x} = \sqrt{15-3x}$$

x 가 가장 작은 자연수가 되려면 근호 안의 수는 15 미만의 가장 큰 제곱수가 되어야 하므로 9가 되어야 한다.

$$\sqrt{15-3x} = \sqrt{9}$$

$$15 - 3x = 9$$

$$\therefore x = 2$$

10. $2x - y = 3$ 일 때, $\sqrt{2x+y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 두 자리 자연수 x 는? [배점 5, 중상]

- ① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 22

해설

$$2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3$$

$$\sqrt{2x+y} = \sqrt{2x+2x-3} = \sqrt{4x-3}$$

x 는 최소한 가장 작은 두자리 수인 10 이상이어야 하므로,

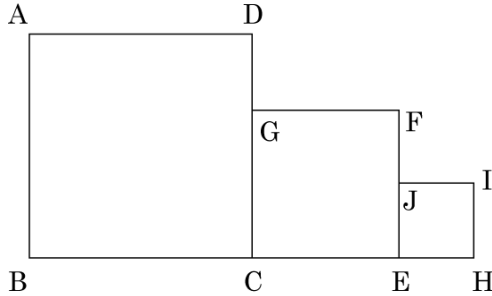
근호 안의 제곱수는 7^2 이상이 되어야 한다.

$$(\sqrt{4 \times 10 - 3} = \sqrt{37} > 7^2)$$

$\therefore \sqrt{4x-3} = 7$ 일 때, $x = 13$ 이므로 성립한다.

$$\therefore x = 13$$

11. 다음 그림에서 $\square ABCD$, $\square C EFG$, $\square EHIJ$ 는 모두 정사각형이고 그 넓이는 각각 S_1 , S_2 , S_3 이다. $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{1}{3}S_1$, $S_3 = \frac{1}{3}S_2$ 일 때, $\overline{BH}$ 의 길이를 구하면?



[배점 5, 중상]

- ① $\frac{13}{9}$ ② $4 - \sqrt{3}$ ③ $\frac{3 + \sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{4 + \sqrt{3}}{3}$

해설

$$\begin{aligned} S_1 = 1 \text{ 이므로, } \overline{BC} &= 1, \\ S_2 &= \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}, \overline{CE} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ S_3 &= \frac{1}{3}S_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \overline{EH} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \\ \therefore \overline{BH} &= \overline{BC} + \overline{CE} + \overline{EH} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4 + \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

12. 다음 보기의 A, B, C, D, E 에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은?

보기

- ㉠ $\sqrt{75} = A\sqrt{3}$
 ㉡ $\sqrt{2^2 \times 5^2 \times 3} = B\sqrt{3}$
 ㉢ $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = C\sqrt{3}$
 ㉣ $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = D\sqrt{3}$
 ㉤ $\sqrt{0.21} \div \sqrt{7} = E\sqrt{3}$

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

- ㉠ $\sqrt{5 \times 5 \times 3} = 5\sqrt{3} \therefore A = 5$
 ㉡ $\sqrt{10^2 \times 3} = 10\sqrt{3} \therefore B = 10$
 ㉢ $7\sqrt{3} \therefore C = 7$
 ㉣ $\frac{3\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{6}{6}\sqrt{3} = \sqrt{3} \therefore D = 1$
 ㉤ $\sqrt{\frac{21}{100}} \times \frac{1}{7} = \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{3} \therefore E = 0.1$
 가장 큰 수 : 10, 가장 작은 수 : 0.1
 $\therefore 10 \times 0.1 = 1$

13. 연속된 세 자연수 a , b , c 에 대하여, $\sqrt{a+b+c}$ 의 값이 자연수가 되기 위한 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하여라. (단, $a + b + c \leq 80$) [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 2쌍

해설

a, b, c 가 연속된 세 자연수이므로 $a = b - 1, c = b + 1$ 이다.

이때, $\sqrt{a+b+c} = \sqrt{3b}$ 가 자연수이므로 $b = 3k^2$ (k 는 자연수)

$a + b + c \leq 80$ 이므로 $3b = 9k^2 \leq 80$
 $k^2 < \frac{80}{9} = 8.888 \dots$ $k = 1, 2$

따라서 조건을 만족하는 세 수 (a, b, c)의 쌍은 (2, 3, 4), (11, 12, 13) 의 2 쌍이다.

14. 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 실수의 집합을 각각 N, Z, Q, I, R 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

[배점 5, 상하]

- ① $0 \in Q \cap I$ ② $0.54\dot{2} \notin Q$
 ③ $\sqrt{\frac{1}{2}} \in R - Q$ ④ $\frac{1}{3} \in I$
 ⑤ $-\sqrt{3} \in Z - N$

해설

- ① $Q \cap I = \emptyset$
 ② $0.54\dot{2} \in Q$
 ④ $\frac{1}{3} \in Q$
 ⑤ $-\sqrt{3} \in I$

15. 실수 x, k 에 대하여 $\sqrt{(x+k)^2} + \sqrt{(x-k)^2} = 2k$ 가 k 의 값에 관계없이 항상 성립하기 위한 x 값의 범위를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $-k < x < k$

해설

$\sqrt{(x+k)^2} + \sqrt{(x-k)^2} = 2k$ 에서

$|x+k| + |x-k| = 2k$ 가 되려면

$x+k > 0, x-k < 0$ 이다.

$\therefore -k < x < k$

16. $2 < \sqrt{a+2b} < 3$ 을 만족하는 순서쌍 (a, b) 는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, a, b 는 자연수, $a \neq b$)

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 9 개

해설

$2 < \sqrt{a+2b} < 3, \sqrt{4} < \sqrt{a+2b} < \sqrt{9}$

$a+2b = 5, 6, 7, 8$

$(a, b) = (1, 2), (3, 1), (4, 1), (1, 3), (3, 2), (5, 1), (2, 3), (4, 2), (6, 1)$

따라서 9 개이다.

17. $\sqrt{10(n-1)}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 두 자리 자연수 n 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $n = 11, 41, 91$

해설

n 이 두 자리의 자연수이므로 $10 \leq n \leq 99$

$$9 \leq n-1 \leq 98$$

$\sqrt{10(n-1)}$ 이 자연수가 되기 위해서는

$$n-1 = 10 \times 1^2, 10 \times 2^2, 10 \times 3^2, \dots$$

이때, $9 \leq n-1 \leq 98$ 을 만족해야 하므로

$$n-1 = 10 \times 1^2 \text{ 에서 } n = 11$$

$$n-1 = 10 \times 2^2 \text{ 에서 } n = 41$$

$$n-1 = 10 \times 3^2 \text{ 에서 } n = 91$$

$$n = 11, 41, 91$$

18. 10 이하의 자연수 a, b 에 대하여 $\sqrt{a+b} = n$ (n 은 자연수)를 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16개

해설

$$a = 1 \text{ 인 경우, } b = 3, 8$$

$$a = 2 \text{ 인 경우, } b = 2, 7$$

$$a = 3 \text{ 인 경우, } b = 1, 6$$

$$a = 4 \text{ 인 경우, } b = 5$$

$$a = 5 \text{ 인 경우, } b = 4$$

$$a = 6 \text{ 인 경우, } b = 3, 10$$

$$a = 7 \text{ 인 경우, } b = 2, 9$$

$$a = 8 \text{ 인 경우, } b = 1, 8, a = 9 \text{ 인 경우, } b = 7$$

$$a = 10 \text{ 인 경우, } b = 6$$

∴ 16개

19. $a - b > 0, ab < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

$$\textcircled{㉠} \sqrt{(b-a)^2} = b-a$$

$$\textcircled{㉡} \sqrt{(ab)^2} = |ab|$$

$$\textcircled{㉢} -\sqrt{b^2} > \sqrt{a^2} + 1$$

$$\textcircled{㉤} \sqrt{a^2} - \sqrt{(-b)^2} = a+b$$

$$\textcircled{㉥} \frac{\sqrt{(ab)^2}}{2} > \frac{\sqrt{(ab)^2}}{3}$$

$$\textcircled{㉦} \sqrt{(-a)^2} + 1 < 1 - \sqrt{b^2}$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉥

해설

$b < 0 < a$ 이므로

$$\textcircled{㉠} : \sqrt{(b-a)^2} = a-b$$

$$\textcircled{㉡} : \sqrt{(ab)^2} = -ab = |ab|$$

$$\textcircled{㉢} : -\sqrt{b^2} = b, \sqrt{a^2} = a$$

$$b-a < 0 \text{ 이므로 } -\sqrt{b^2} < \sqrt{a^2} + 1$$

$$\textcircled{㉤} : \sqrt{(-a)^2} = a$$

$$-\sqrt{b^2} = -(-b) = b$$

$$\sqrt{(-a)^2} + 1 > 1 - \sqrt{b^2}$$

20. $x = \sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{3 - \dots}}}$ 일 때, $x^2 + x + 1$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{3 - \dots}}} \text{에서} \\ \sqrt{3 - \sqrt{3 - \sqrt{3 - \dots}}} &= \sqrt{3 - x} = x \text{ 이므로} \\ 3 - x &= x^2, x^2 + x = 3 \\ \therefore x^2 + x + 1 &= 4\end{aligned}$$