

단원 종합 평가

1. 다음 중 y 가 x 에 관한 이차함수인 것을 모두 고르면? [배점 2, 하중]

- ① 반지름의 길이가 x 인 원의 넓이 y
 ② 가로 길이가 $x+2$, 세로 길이가 $x+3$ 인 직사각형의 넓이 y
 ③ 한 변의 길이가 x 인 정사각형의 둘레의 길이 y
 ④ 한 모서리의 길이가 x 인 정육면체의 부피 y
 ⑤ 밑변의 길이가 y , 높이 2 인 삼각형의 넓이 x

해설

- ① $y = x^2\pi$ 이므로 이차함수이다.
 ② $y = (x+2)(x+3)$ 이므로 이차함수이다.
 ③ $y = 4x$ 이므로 이차함수가 아니다.
 ④ $y = x^3$ 이므로 이차함수가 아니다.
 ⑤ $x = y$ 이므로 이차함수가 아니다.

2. 이차함수 $y = x^2 + ax + 5$ 의 축의 방정식이 $x = 3$ 일 때, a 의 값을 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: -6

해설

$$y = x^2 + ax + 5 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 5,$$

축이 $x = 3$ 이므로 $-\frac{a}{2} = 3$,
 $\therefore a = -6$

3. 이차함수 $y = -2(x+5)^2 - 4$ 의 그래프에서 꼭짓점의 좌표를 (a, b) , 축을 $x = c$ 라 할 때, $a - b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: -6

해설

$$y = -2(x+5)^2 - 4 \text{ 의 꼭짓점의 좌표는 } (-5, -4) = (a, b)$$

축은 $x = c = -5$
 $\therefore a - b + c = -5 - (-4) + (-5) = -6$

4. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax - a - 2$ 의 최댓값이 1 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$) [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 정답: 1

해설

$$y = -x^2 + 4ax - a - 2$$

$$= -(x^2 - 4ax) - a - 2$$

$$= -(x - 2a)^2 + 4a^2 - a - 2$$

최댓값이 $4a^2 - a - 2 = 1$ 이므로
 $4a^2 - a - 3 = 0$,
 $(4a + 3)(a - 1) = 0$,
 $a = -\frac{3}{4}$ 또는 $a = 1$,
 $\therefore a > 0$ 이므로 $a = 1$

5. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 4$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값은? [배점 3, 하상]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = x^2 + 2ax + 4 = (x + a)^2 - a^2 + 4$$

꼭짓점의 좌표가 $(1, b)$ 이므로
 $-a = 1, -a^2 + 4 = b$ 이다.
 $a = -1, b = 3 \therefore a + b = 2$,

6. 다음 중 이차함수의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [배점 3, 하상]

- ① $y = 2x^2 + 1$ 의 그래프는 아래로 볼록하다.
- ② $y = -2(x + 2)^2$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이다.
- ③ $y = -(x - 5)^2$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만난다.
- ④ $y = -(x - 3)^2 + 1$ 의 그래프의 꼭짓점 좌표는 $(3, 1)$ 이다.
- ⑤ $y = x^2$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

해설

② $y = -2(x + 2)^2$ 은 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : -19

해설

$$y = x^2 - 6x - 10 = (x - 3)^2 - 19$$

$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

8. 이차함수 $y = (x + 3)^2 - 9$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 하상]

- ① 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -9)$ 이다.
- ② 대칭축은 $x = -3$ 이다.
- ③ 그래프는 아래로 볼록한 모양이다.
- ④ x 축과 두 점에서 만난다.
- ⑤ 제 1, 2, 3, 4 사분면을 모두 지난다.

해설

⑤ 제 4 사분면을 지나지 않는다.

9. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 10 인 직사각형의 최대 넓이는?



[배점 3, 하상]

- ① $\frac{25}{4}$
- ② $\frac{25}{2}$
- ③ 25
- ④ 50
- ⑤ 100

해설

두 변의 길이를 x , $10 - x$, 넓이를 y 라 하면
 $y = x(10 - x)$
 $= -(x^2 - 10x)$
 $= -(x^2 - 10x + 25 - 25)$
 $= -(x - 5)^2 + 25$
 $\therefore$ (최대 넓이) $= 25$

10. 평행이동에 의하여 포물선 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$ 의 그래프와 완전히 포개어지는 것은? [배점 3, 중하]

- ① $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$
 ② $y = -3x^2 - 2x + 1$
 ③ $y = 3x^2 + 1$
 ④ $y = x^2 + 1$
 ⑤ $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$

해설

완전히 포개어지려면 x^2 의 계수가 같아야 한다.

11. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 2k - 5$ 의 꼭짓점이 직선 $y = x + 2$ 위에 있다고 한다. 이때, k 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: $k = \frac{1}{2}$

해설

$y = -x^2 + 6x + 2k - 5 = -(x - 3)^2 + 2k + 4$
 꼭짓점 $(3, 2k + 4)$ 가 $y = x + 2$ 위에 있으므로
 $2k + 4 = 5$, $2k = 1$
 $\therefore k = \frac{1}{2}$

12. 다음 중 이차함수 $y = ax^2$ ($a < 0$) 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ① 위로 볼록한 그래프이다.
 ② y 축에 대하여 대칭이다.
 ③ 치역은 $\{y \mid y \leq 0\}$ 이다.
 ④ $x < 0$ 의 범위에서 x 가 증가할 때, y 는 감소한다.
 ⑤ a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

해설

④ $x < 0$ 의 범위에서 x 가 증가할 때, y 도 증가한다.

13. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 값의 범위는? [배점 3, 중하]

- ① $x > -1$ ② $x < -2$ ③ $x > 2$
 ④ $x < 1$ ⑤ $x < \frac{1}{2}$

해설

주어진 이차함수는 아래로 볼록이고, 축의 방정식이 $x = -2$ 이므로
조건을 만족하는 부분은 $x < -2$

14. 다음 이차함수의 그래프 중 아래로 볼록한 것을 모두 고르면? [배점 3, 중하]

- ① $y = \frac{1}{2}x^2$ ② $y = -x^2$
③ $y = 3x^2 + 4$ ④ $y = -2 - x^2$
⑤ $y = x(10 - x)$

해설

이차항의 계수가 양수이면 아래로 볼록하다.

15. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + b$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, a, b 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$y = x^2 - 2ax + b$ 가 $x = 2$ 일 때,
최솟값이 -2 이므로
 $y = (x - 2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$
 $\therefore 2a = 4, a = 2, b = 2$

16. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 + kx - 11$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 x 값의 범위가 $x < -5$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

주어진 조건에서 그래프의 축의 방정식은 $x = -5$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 + kx - 11 \\ &= -\frac{1}{2}(x + 5)^2 + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 5x - 11 \\ \therefore k &= -5 \end{aligned}$$

17. 다음 중 이차함수 $y = -\frac{3}{4}x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?(정답 2개)

[배점 4, 중중]

① $(2, -3)$ 을 지난다.

② 축의 방정식은 $y = 0$ 이다.

③ 치역은 $\{y | y \leq 0\}$ 이다.

④ 제 3, 4 사분면을 지난다.

⑤ x 의 값이 증가할 때, y 값도 증가한다.

해설

① $(2, -3)$ 을 대입하면 식을 만족하므로 지난다.

② 축은 $x = 0$ 이므로 옳지 않다.

③ 위로 볼록하고 꼭짓점이 원점이므로 $y \leq 0$

④ 위로 볼록, 꼭짓점이 원점인 그래프를 그리면 제 3, 4 분면을 지난다.

⑤ x 값이 증가할 때 y 값은 감소한다.

18. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 6 만큼 평행이동시켰더니 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프가 되었다. 이 때, apq 의 값은?

[배점 4, 중중]

- ① 6 ② -6 ③ 8 ④ 9 ⑤ -9

해설

x 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 6 만큼 평행이동하면

$$y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 6$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, p = -3, q = 6$$

$$\therefore apq = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) \times 6 = 9$$

19. 이차함수 $y = \frac{2}{3}(x-4)^2 + 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(2, b)$ 가 된다. 상수 a, b 의 차 $a-b$ 의 값을 구하면? [배점 4, 중중]

- ① -4 ② 2 ③ 0 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차함수 $y = \frac{2}{3}(x-4)^2 + 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면

$y = \frac{2}{3}(x-4-a)^2 + 5-3$ 이므로 꼭짓점의 좌표가 $(4+a, 2)$ 이다.

따라서 $4+a=2$, $a=-2$, $b=2$ 이다.

$$\therefore a-b = (-2) - 2 = -4$$

20. 다음 중 x 축과의 교점이 $(-2, 0)$, $(2, 0)$ 이고 한 점 $(0, -2)$ 를 지나는 포물선의 식은?

[배점 4, 중중]

① $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

② $y = 3x^2 - 3x - 6$

③ $y = -x^2 + 6x - 8$

④ $y = x^2 + 6x - 8$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

해설

$y = a(x+2)(x-2)$ 이고, $(0, -2)$ 를 지난다.

$$-2 = -4a$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}(x+2)(x-2) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

21. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + k$ 의 최솟값과 이차함수 $y = -2x^2 + 4x - 2k + 2$ 의 최댓값이 일치할 때, k 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

i) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16 - 16) + k = \frac{1}{2}(x-4)^2 + k - 8$
 $x = 4$ 일 때, 최솟값 $k - 8$ 을 갖는다.

ii) $y = -2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 2k + 2 = -2(x-1)^2 - 2k + 4$

$x = 1$ 일 때 최댓값 $-2k + 4$ 를 갖는다.

i) 의 최솟값과 ii) 의 최댓값이 같으므로 $k - 8 = -2k + 4$

$$\therefore k = 4$$

22. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 조건을 만족할 때, 상수 b 의 값을 구하여라.

(가) 상수 m, n 에 대하여 $m - n = 6$ 이다.
(나) 두 점 $(1, m)$ 과 $(-1, n)$ 을 지난다.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 점 $(1, m)$ 과 $(-1, n)$ 을 함수식에 대입하면
 $m = a + b + c, \quad n = a - b + c$
 두 식을 연립하여 풀면 $m - n = 2b, \quad m - n = 6$
 이므로 $2b = 6 \quad \therefore b = 3$

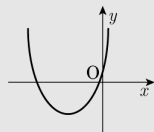
23. 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프가 제 1, 2, 3 사분면을 지날 때, a, p, q 의 부호는?

[배점 5, 중상]

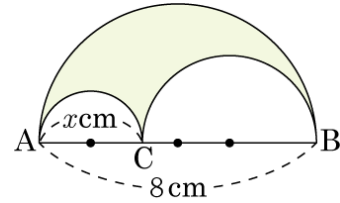
- ① $a < 0, p < 0, q < 0$
 ② $a < 0, p > 0, q < 0$
 ③ $a > 0, p < 0, q > 0$
 ④ $a > 0, p > 0, q > 0$
 ⑤ $a > 0, p < 0, q < 0$

해설

$y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프가 다음과 같아야 하므로 $a > 0, p < 0, q < 0$



24. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8 - x)\text{cm}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{ \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2 \right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64 - 16x + x^2}{8}\pi \right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2 - 16x + 64}{8} \right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$y\pi = -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x)$$

$$= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x + 16 - 16)$$

$$= -\frac{1}{4}\pi(x - 4)^2 + 4\pi \text{ 이다.}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4cm 일 때, 넓이는 최댓값 $4\pi\text{cm}$ 를 갖는다.

25. 이차함수 $y = x^2 + mx + m$ 의 최솟값을 M 이라 할 때, M 의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + mx + m = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m$$

$$\text{최솟값 } M = -\frac{m^2}{4} + m$$

$$M = -\frac{m^2}{4} + m = -\frac{1}{4}(m-2)^2 + 1$$

$m = 2$ 일 때, M 은 최댓값 1 을 갖는다.