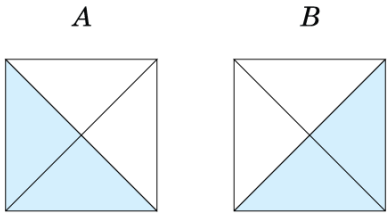
단원 종합 평가

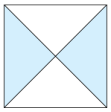
1. 두 집합 A, B 가 다음 그림과 같을 때, $A \cup B$ 를 나타낸 것으로 옳은 것은?

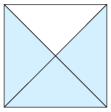


[배점 3, 중하]

①

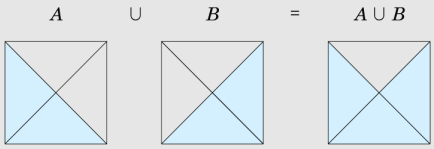
②

③ 

④ 

⑤

해설



2. 다음 중 약수의 개수가 서로 다른 두 수로 짝지어진 것은? [배점 3, 중하]

① 8, 3^3 ② 21, 5×7

③ 45, $2^2 \times 3$ ④ 100, 2^{10}

⑤ 72, $3 \times 5 \times 7^2$

해설

① $8 = 2^3$ 이므로 약수의 개수는 $3+1=4$ (개) 이고, 3^3 의 약수의 개수도 $3+1=4$ (개) 이다.

② $21 = 3 \times 7$ 이므로 약수의 개수는 $(1+1) \times (1+1) = 4$ (개) 이고, 5×7 의 약수의 개수는 $(1+1) \times (1+1) = 4$ (개) 이다.

③ $45 = 3^2 \times 5$ 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (1+1) = 6$ (개) 이고, $2^2 \times 3$ 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (1+1) = 6$ (개) 이다.

④ $100 = 2^2 \times 5^2$ 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (2+1) = 9$ (개) 이고, 2^{10} 의 약수의 개수는 $10+1=11$ (개) 이다.

⑤ $72 = 2^3 \times 3^2$ 의 약수의 개수는 $(3+1) \times (2+1) = 12$ (개) 이고, $3 \times 5 \times 7^2$ 의 약수의 $(1+1) \times (1+1) \times (2+1) = 12$ (개) 이다.

3. 어떤 자연수 x 의 약수의 개수를 $R(x)$ 라 하고, $R(40) \times R(75) = a$ 라 할 때, $R(a)$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$40 = 2^3 \times 5$ 이므로 $R(40) = (3+1) \times (1+1) = 8$ 이다.

$75 = 3 \times 5^2$ 이므로 $R(75) = (1+1) \times (2+1) = 6$ 이다.

$\therefore\ 8 \times 6 = 48$

따라서 $48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $R(48) = (4+1) \times (1+1) = 10$ 이다.

4. 다음을 계산하여 십진법의 수로 나타내어라.

$1100_{(2)} - 111_{(2)}$ [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ 2} \\ {\scriptstyle 0\ 1\ 2} \\ 1\cancel{1}\cancel{0}0_{(2)} \\ -\quad 111_{(2)} \\ \hline 101_{(2)} \end{array}$$

$101_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 5$

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B = \{1,\ a-2,\ a,\ a \times 2\}$ 이다. a 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ 이므로, a 값은 2, 4, 8 중 하나여야 한다.

이 중 $a-2$, a, $a \times 2$ 가 모두 집합 A 의 원소가 되는 a 값을 찾으면 $a = 4$ 이다.

6. $2^3 + 1 < X < 2^4$ 인 수 X 를 이진법으로 나타내었을 때, 몇 자리의 수가 되는지 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 네 자리의 수

해설

$2^3 + 1 = 9 = 1001_{(2)}$, $2^4 = 10000_{(2)}$ 이므로

$1001_{(2)} < X < 10000_{(2)}$

따라서 X 를 이진법으로 나타내면 네 자리의 수이다.

7. 자연수 864 의 약수의 개수와 $2^2 \times 3 \times 5^n$ 의 약수가 개수가 같을 때, n 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$864 = 2^5 \times 3^3$ 이므로

약수의 개수는 $(5+1) \times (3+1) = 24$ (개)

$2^2 \times 3 \times 5^n$ 의 약수의 개수는

$(2+1) \times (1+1) \times (n+1) = 6 \times (n+1)$ (개)

$6 \times (n+1) = 24$ 이므로 $n+1 = 4$

$\therefore\ n = 3$

8. 다음 보기 중 6 과 서로소인 수를 모두 찾아라.

보기

3, 9, 11, 12, 15, 17, 25

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 25

해설

$6 = 2 \times 3$ 이므로 소인수로 2 와 3 을 갖지 않는 것을 찾는다.
11, 17 은 소수이며, $25 = 5^2$ 이므로 답은 11 , 17 , 25 이다.

9. 집합 $A = \{x \mid x$는 13보다 작은 홀수$\}$ 의 1, 3 을 반드시 포함하고 9 는 포함하지 않는 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 것은 몇 개인지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 에서 원소 1, 3, 9 를 제외한 $\{5, 7, 11\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 것은 $\{5, 7\}, \{7, 11\}, \{5, 11\}$ 의 3 개이므로, 1, 3 을 반드시 포함하고 9 는 포함하지 않는 A 의 부분집합은 $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 7, 11\}$, $\{1, 3, 5, 11\}$ 이다.

10. 이진법에서 1 의 자리로부터 왼쪽으로 여섯 번째 자리의 값은 얼마인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$1 \times \times \times \times \times \times_{(2)}$ 에서 1이 나타내는 자리는 2^6 자리이다. 즉, 64이다.

11. 집합 $A = \{x \mid x$는 25의 소인수$\}$ 집합 $B = \{x \mid x$는 156의 소인수$\}$ 에 대하여 $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$25 = 5^2$, $156 = 2^2 \times 3 \times 13$ 이므로
$A = \{5\}$, $B = \{2, 3, 13\}$
$\therefore\ n(A) + n(B) = 1 + 3 = 4$

12. 두 자연수의 곱이 972 이고, 최대공약수가 9 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 36

해설

두 자연수를 A, B 라 하고 최소공배수를 L 이라 하면 $972 = 9 \times L$ 이므로 $L = 108$

$9) \begin{array}{cc} A & B \\ a & b \end{array}$

$9 \times a \times b = 108$
$a \times b = 12$ (단, a, b 는 서로소)
$A = 9 \times a$, $B = 9 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면
$a = 12$, $b = 1$ 또는 $a = 4$, $b = 3$
(i) $a = 12$, $b = 1$ 일 때
$A - B = 9 \times 12 - 9 \times 1 = 99$
(ii) $a = 4$, $b = 3$ 일 때
$A - B = 9 \times 4 - 9 \times 3 = 9$
따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 27, 36 이다.

13. $5^4 \times \square$의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\square = a^x$(a는소수) 라고 하면 $5^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 15 개이므로

$(4+1) \times (x+1) = 15$, $x+1 = 3$, $x = 2$ 이다.

또한 가장 작은 자연수가 되기 위해서는 $a = 2$ 이다.

따라서 $\square = a^x = 2^2 = 2 \times 2 = 4$ 이다.

14. 9 로 나누면 나머지가 8, 8 로 나누면 나머지가 7, 7 로 나누면 나머지가 6, 6 으로 나누면 나머지가 5, 5 로 나누면 나머지가 4 인 자연수 중에서 최소의 자연수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 2519

해설

조건을 만족하는 수는

(9, 8, 7, 6, 5 의 공배수)−1 의 꼴이고

9, 8, 7, 6, 5 의 최소공배수는 2520 이다.

따라서 최소의 자연수는 $2520 - 1 = 2519$ 이다.

15. 전체집합 $U = \{x | x$는 25 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 10$, $n(B^c) = 10$, $n(A^c \cap B^c) = 3$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

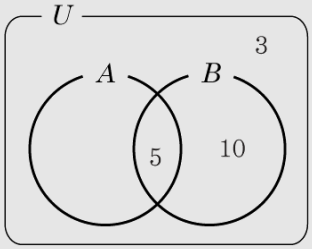
▷ 정답: 7

해설

$n(U) = 25$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 25 - 10 = 15$

$A^c \cap B = B - A$ 이므로



$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 10$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 3$

벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서 $n(A - B) = 25 - (5 + 10 + 3) = 7$ 이다.

16. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

[배점 5, 상하]

① 9 ② 12 ③ 36

④ 54 ⑤ 100

해설

$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$

가장 작은 $a = 2 \times 3 = 6$

$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$

$\therefore A = 12$

17. 63 를 소인수분해 한 것으로 옳은 것은? [배점 5, 상하]

① 7×9 ② 2^6

③ $3^2 \times 7$ ④ $2^2 \times 3 \times 5$

⑤ $2^6 \times 9$

해설

$$\begin{array}{r} 3) \underline{63} \\ 3) \underline{21} \\ 7 \end{array}$$

18. 세 수 437, 389, 137 을 어떤 수로 나누었더니 그 나머지가 모두 같았다. 어떤 수 중에서 가장 큰 수와 그 때의 나머지를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 어떤 수: 12

▷ 정답: 나머지: 5

해설

어떤 수를 x, 나머지를 r이라 하고 세 수 437, 389, 137의 몫을 각각 Q_1, Q_2, Q_3라 하면

$437 = xQ_1 + r$, $389 = xQ_2 + r$, $137 = xQ_3 + r$ 이므로

각각의 수의 차는 x로 나누어 떨어진다.

$437-389 = 48$, $389-137 = 252$, $437-137 = 300$

48, 252, 300의 최대공약수는 12이므로 어떤 수는 12이고 그 때의 나머지는 5이다.

19. 집합 $A = \{a, d, e\}$ 이고 집합 $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, $A \cap X = \{a, e\}$, $c \notin X$, $X \cup B = B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 4 개

해설

집합B 의 부분집합 중 원소 a, e 는 포함하고, 원소 c, d 는 포함하지 않는 부분집합의 수를 구한다.

$2^{6-2-2} = 2^2 = 4$ (개)

20. 숫자 0 과 1 을 다음과 같은 규칙으로 나열하였다.

$1001110000111110000001111111\cdots$ 왼쪽에서부터 101 번째 숫자부터 106 번째 숫자로 2 진수를 만들 때, 그 수를 십진수로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$1001110000111110000001111111\cdots$ 는

$1, 00, 111, 0000, 11111, 000000, 1111111, \cdots$ 의 묶음으로 나눌 수 있다.

각 묶음이 1 씩 커진다.

1 부터 13 까지의 합$= \dfrac{13 \times 14}{2} = 91$ 이므로,

92 번째 수부터 105 번째 수까지 14 개의 수가 연속으로 0 이 된다.

106 번째 수는 1 이다. 따라서 만들 수 있는 이진수는 $1_{(2)}$ 이고, 십진수로 나타내어도 1 이다.