단원 종합 평가

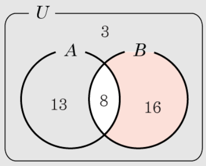
1. 우리 반 학생 40 명 중에서 백일장에서 글을 쓴 학생은 21 명, 그림을 그린 학생은 24 명, 글도 쓰고 그림도 그린 학생은 8 명이다. 이때, 그림만 그린 학생 수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 명

해설

전체학생을 U, 글을 쓴 학생을 A, 그림을 그린 학생을 B라 할때, 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 그림만 그린 학생 수는 16 명이다.

2. 두 집합 $A = \{a-3, 2, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3b, 2a-1\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다

$a - 3 = 1$

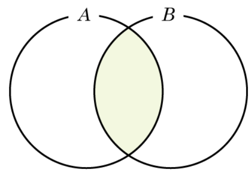
$\therefore\ a = 4$

$B = \{1, 2, 3b, 7\}$

$3b = 6$

$\therefore\ b = 2$

3. 두 집합 $A = \{2, 4, 8, 9, 10, 12\}$, $B = \{x \mid x$는 24 의 약수$\}$일 때, 다음의 벤 다이어그램에서 색칠한 부분의 집합의 원소의 합을 구하여라.



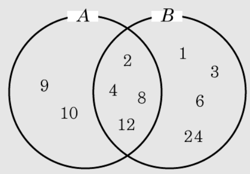
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$가 된다.
벤 다이어그램을 이용하면 다음과 같다.



공통부분의 원소는 $\{2, 4, 8, 12\}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 원소의 합은 $2+4+8+12 = 26$ 이다.

4. 집합 $A = \{x \mid x$는 $4 \le x \le 8$인 자연수$\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3 개 인 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10 개

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3 개인 부분집합은
$\{4,\ 5,\ 6\}$, $\{4,\ 5,\ 7\}$, $\{4,\ 5,\ 8\}$, $\{4,\ 6,\ 7\}$, $\{4,\ 6,\ 8\}$, $\{4,\ 7,\ 8\}$, $\{5,\ 6,\ 7\}$, $\{5,\ 6,\ 8\}$, $\{5,\ 7,\ 8\}$, $\{6,\ 7,\ 8\}$ 따라서 부분집합의 개수는 10 이다.

5. $\{3\} \subset X \subset \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 X 는 3 을 반드시 원소로 가지는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 의 부분집합이므로 개수는 $2^3 = 8$ (개)

6. 264 의 소인수의 집합은? [배점 4, 중중]

① $\{2,\ 3,\ 11\}$
② $\{1,\ 2,\ 3,\ 11\}$
③ $\{2^2,\ 11\}$
④ $\{2^3,\ 3,\ 11\}$
⑤ $\{2,\ 3,\ 5,\ 11\}$

해설

$264 = 2^3 \times 3 \times 11$

7. 두 수 $2^a \times 3 \times 5$, $2 \times 5^b \times 7^c$ 의 최소공배수를 구하면 $2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$ 이다. $a + b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2^a = 2$ 이므로 $a = 1$
$5^b = 5^2$ 이므로 $b = 2$
$7^c = 7^2$ 이므로 $c = 2$ 따라서 $a + b + c = 5$

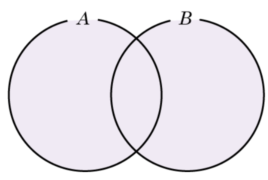
8. $A = \{1,\ \{2,\ 3\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [배점 5, 중상]

① $\{2,\ 3\} \in A$
② $\{2,\ 3\} \subset A$
③ $\{1,\ \{2,\ 3\}\} \subset A$
④ $1 \in A$
⑤ $\{2,\ 3\} \in A$

해설

② $\{2,\ 3\} \not\subset A$

9. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15\}$, $B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합의 원소의 합을 구하여라.



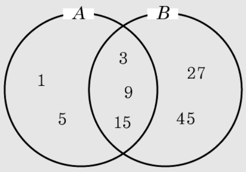
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 105

해설

$B = \{3 \times x \mid x \in A\}$ 는 집합 A 의 원소를 x 에 대입한 수들의 집합이다.
원소나열법으로 고쳐보면,
$B = \{3,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.
벤 다이어그램을 그리면 다음과 같다.



색칠한 부분의 원소는 $\{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 27,\ 45\}$ 이다.
따라서 모든 원소의 합은
$1+3+5+9+15+27+45=105$ 이다.

10. 두 집합 $A = \{7,\ 8,\ a\}$, $B = \{5,\ 6,\ a+3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{6\}$

해설

$9 \in A$ 또는 $9 \in B$ 이므로
$a = 9$ 또는 $a+3=9$
i) $a = 9$ 이면 $A = \{7,8,9\}$, $B = \{5,6,12\}$
$A \cup B = \{5,6,7,8,9,12\}$ 가 되어 문제의 조건을 만족하지 못한다.
ii) $a+3=9$ 이면 $a=6$
$A = \{6,7,8\}$, $B = \{5,6,9\}$
$A \cup B = \{5,6,7,8,9\}$ 이므로 조건을 만족한다.
$\therefore A \cap B = \{6\}$

11. 21 과 27 중 어느 것으로 나누어도 5 가 남는 수 중에서 가장 큰 세 자리 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 950

해설

21 과 27 의 최소공배수 : 189
$189 \times 5 + 5 = 950$

12. 자연수 x 를 소인수분해 했을 때 나타나는 소인수들의 합을 기호 $S(x)$ 로 나타내기로 할 때, 어떤 자연수 m 을 소인수분해 하면 세 종류의 소인수가 나타나고, $S(m) = 12$ 라고 한다. 이 때, 이를 만족하는 m 의 값의 합을 구하여라.
(예를 들면, $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로 $S(72) = 2+2+2+3+3 = 12$ 가 된다.) [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 102

해설

세 종류의 소수의 합이 12 이하인 경우는
(2, 3, 5), (2, 3, 7) 의 두 가지 경우이다.
$S(m) = 2+2+3+5$ 또는 $S(m) = 2+3+7$ 이므로
$m = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ 또는 $m = 2 \times 3 \times 7 = 42$
따라서 $60+42=102$ 이다.

13. 집합 $S=\{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

㉠ $\{a\}\subset S$

㉡ $\{b\}\in S$

㉢ $\{b,\ c,\ d\}\in S$

㉣ $c\in S,\ d\in S$

㉤ $\{c,\ d\}\subset S$

㉥ $S\subset\{a,\ b,\ c,\ d\}$

[배점 5, 상하]

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다. 따라서 집합 S 의 원소는
$\{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 가 된다.
㉠ $\{a\}\subset S \rightarrow \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉡ $\{b\}\in S \rightarrow b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.
㉢ $\{b,c,d\}\in S \rightarrow b,c,d$ 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b,c,d\}\subset S$ 가 되어야 한다.
㉣ $c\in S, d\in S \rightarrow c,d$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉤ $\{c,d\}\subset S \rightarrow c,d$ 는 집합 S 의 원소이고 $\{c,d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.
㉥ $S\subset\{a,\ b,\ c,\ d\}\rightarrow$ 집합 S 는 $\{a,b,c,d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

14. 전체집합 U 의 세 부분집합 A,B,C 에 대하여 $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)=\varnothing$ 이다.
$A=\{1,2,3\}$ 일 때, $n(B)\times n(C)$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)=\varnothing$ 이면
$A-B=\varnothing, B-C=\varnothing, C-A=\varnothing$,
$A\subset B, B\subset C, C\subset A$ 이므로
$A=B=C$
따라서 $n(B)=n(C)=3$ 이므로 $n(B)\times n(C)=9$

15. 집합
$A=\{x\mid x$는 a^2을 10으로 나눈 나머지, a는 자연수$\}$
일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 64 개

해설

제곱수의 일의 자리를 살펴보면 1^2 은 1, 2^2 은 4, 3^2 은 9, 4^2 은 6, 5^2 은 5, 6^2 은 6, 7^2 은 9, 8^2 은 4, 9^2 은 1, 10^2 은 0, 11^2 은 1, $\cdots$ 이므로
$A=\{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9\}$
따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^6=64$ (개) 이다.

16. 자연수 $a,\ b$ 에 대하여 $11101_{(2)}+a,\ 11001_{(2)}-b$ 가 모두 9 의 배수가 될 때, $a+b$ 의 최솟값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$11101_{(2)}+a=29+a$ 9 의 배수

$\therefore 29+a=36,\ a=7$

$11001_{(2)}-b=25-b$가 9 의 배수이므로

$\therefore 25-b=18,\ b=7$

$\therefore a+b=14$

17. 두 자리 자연수 $a,\ b$ 의 곱은 735 이고, $a+b$ 와 $a-b$ 의 최대공약수는 14 일 때, $a,\ b$ 의 최대공약수를 구하여라. (단, $a>b$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$735=3\times5\times7^2$ 이므로, 두 자리 $a,\ b$ 의 순서쌍은 다음과 같다.

$(a,\ b)=(49,15),\ (35,21),$

위 순서쌍이 $a+b$ 와 $a-b$ 의 최대공약수 14 를 만족시켜야 하므로,

$\rightarrow a=35,\ b=21$

$\therefore a,\ b$ 의 최대공약수$=7$

18. 전체집합 $U=\{1,2,3,4\}$ 의 두 부분집합이 $A,\ B$ 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A,B) 의 개수를 구하여라.

(1) $A\cap B=\varnothing$
(2) $A\cup B=U$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A\cap B=\varnothing$ 이고 $A\cup B=U$ 이면 $n(A)+n(B)=n(U)=4$

$n(A)=0,\ n(B)=4$ 인 경우 : 1 개

$n(A)=1,\ n(B)=3$ 인 경우 : 4 개

$n(A)=2,\ n(B)=2$ 인 경우 : 6 개

$n(A)=3,\ n(B)=1$ 인 경우 : 4 개

$n(A)=4,\ n(B)=0$ 인 경우 : 1 개

따라서 순서쌍 (A,B) 의 개수는 $1+4+6+4+1=16$ (개)

19. 200 개의 10 원 동전이 일렬로 나란히 놓여 있다. 이 중 처음에는 200 개의 동전 모두를 50 원 동전으로 바꾸고, 두 번째에는 왼쪽에서 짝수 번째에 있는 동전만 10 원 동전으로 다시 바꾸고, 세 번째에는 3 번째, 6 번째, 9 번째, $\cdots$ 동전 중 10 원 동전인 것은 50 원 동전으로 50 원 동전인 것은 10 원 동전으로 바꾼다. 같은 방법으로 네 번째, 다섯 번째, $\cdots$, 200 번째에서는 4 의 배수번 째, 5 의 배수번 째, $\cdots$ 200 의 배수번 째 동전의 종류를 바꾼다고 할 때, 마지막에 놓여있는 금액은 처음보다 얼마 늘어나는지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 560 원

해설

주어진 조건을 보면 n 번째 동전은 n 의 약수의 개수만큼 뒤집어진다는 것을 알 수 있다.
1 을 제외한 수 중 약수의 개수가 홀수 개인 수는 어떤 수의 제곱이 되는 수이므로,
홀수 번 뒤집어지는 수는 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196$ 이다.
따라서, $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196$ 번째 동전만 50 원이 되고 나머지는 모두 10 원이므로
$\therefore$(마지막에 놓여있는 금액$-$처음 놓여있는 금액) $= 14 \times 40 = 560$ (원)

20. 양팔저울과 몇 개의 추로 364g 까지의 자연수 무게를 측정하려고 한다. 필요한 최소의 추의 개수는 몇 개인지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

양팔저울은 오른쪽 저울에 올리는 경우, 왼쪽 저울에 올리는 경우, 올리지 않는 경우로 총 세 가지 경우가 가능하므로, 양팔저울을 이용한 무게 측정은 3 진법으로 나타낼 수 있다.
3 진법의 추는 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g, 729g, 등이고, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$ 이므로, 필요한 최소의 추는 6 개이다.