

단원 종합 평가

1. $A = \{1, a, 5\}, B = \{a + 1, 5, 7\}$ 이고 $A - B = \{1, 3\}$ 일 때, $B \cap A^c$ 은? [배점 3, 중하]

- ① $\{4\}$ ② $\{7\}$ ③ $\{4, 7\}$
④ $\{3, 7\}$ ⑤ $\{2, 3, 7\}$

해설

$A - B = \{1, 3\}$ 이므로 $a = 3$ 이다. 따라서 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{4, 5, 7\}$ 이고 $B \cap A^c = B - A = \{4, 7\}$ 이다.

2. 집합 $A = \{0, 1, \{0, 1\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $0 \in A$ ② $\{0, 1\} \in A$
③ $2 \notin A$ ④ $\{1\} \in A$
⑤ $\{0, 1\} \subset A$

해설

A 의 원소는 $0, 1, \{0, 1\}$ 이므로 $\{1\}$ 은 A 의 부분집합이고, $\{0, 1\}$ 은 A 의 원소도 되고 부분집합도 된다.

3. $101101_{(2)}$ 에서 앞의 밑줄 친 1 이 나타내는 값은 뒤의 밑줄 친 1 이 나타내는 값의 몇 배인지 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 8배

해설

이진법의 수는 자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 2 배씩 커진다.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 \end{array}$$

따라서 앞 수는 뒤 수의 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (배) 이다.

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 5 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 42

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\},$
 $\{1, 7\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\},$
 $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}$
 $\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}$
 $\{5, 6\}, \{5, 7\},$
 $\{6, 7\}$

따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 \text{ (개) 이다.}$$

집합 A 의 부분집합 중 원소가 5 개인 집합은 원소 2 개를 짝짓고 남은 5 개의 원소를 원소로 갖는 집합이므로 원소가 2 개인 부분집합의 개수와 같은 개수의 부분집합이 만들어진다. 즉 21 개가 된다.

$$a = 21, b = 21 \text{ 이므로 } a + b = 42$$

5. 어느 학급에서 어느 날 갑자기 교과서를 검사하였더니 영어 책을 가져 온 학생이 15 명이고, 영어 책과 수학 책을 모두 가져 온 학생이 8 명, 영어 책 또는 수학 책을 가져 온 학생이 55 명이었다. 수학 책을 가져 온 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 48 명

해설

영어 책을 가져 온 학생을 집합 A 라 하고, 수학 책을 가져 온 학생을 B 라고 하자.

그렇다면 영어 책과 수학 책을 모두 가져 온 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

수학 책을 가져 온 학생, 즉 $n(B)$ 를 구하는 것이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$55 = 15 + x - 8$$

그러므로 x 는 48이다.

6. $2^5 = a$, $3^b = 243$ 을 만족하는 a , b 의 값을 각각 구하면? [배점 4, 중중]

① $a = 16$, $b = 4$ ② $a = 16$, $b = 5$

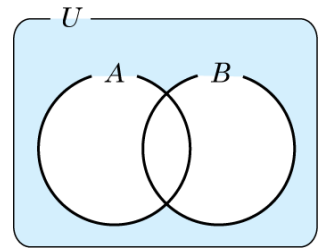
③ $a = 32$, $b = 4$ ④ $a = 32$, $b = 5$

⑤ $a = 32$, $b = 6$

해설

$2^5 = 32$, $3^5 = 243$ 이므로 $a = 32$, $b = 5$ 이다.

7. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 나타내는 집합을 모두 고르면?



[배점 5, 중상]

① $(A \cap B)^c$

② $A^c \cap B^c$

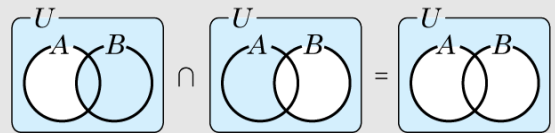
③ $U - (A \cap B)$

④ $U - (A \cup B)$

⑤ $(A \cup B)^c$

해설

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$



8. 1 부터 50 까지의 자연수를 다음과 같이 연속하는 세 개의 수씩 묶어 차례로 늘어놓았다.
(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), ..., (48, 49, 50)
일 때, 세 수의 합이 12 의 배수인 묶음의 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

묶음의 합은 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ..., 147 이다.

이 중 12 의 배수는 12, 24, 36, ..., 144 이므로 가운데 수가 4 의 배수가 되면 묶음의 합은 12 의 배수가 된다.

따라서, $49 = 4 \times 12 + 1$ 에서 12 개이다.

9. $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가질 때, 세 자연수 a, b, c 의 최솟값의 합을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

132 를 소인수분해하면 $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ 이다.
한편 $2^a \times 3^b \times 11^c$ 이 132 를 약수로 가지므로 a 는 2 보다 크거나 같고, b 는 1 보다 크거나 같다.
또한 c 도 1 보다 크거나 같다.
따라서 a, b, c 의 최솟값은 각각 2, 1, 1 이므로 구하는 합은 $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.

10. 최대공약수가 $3 \times x$ 인 두 자연수의 공약수가 4 개일 때, x 의 값이 될 수 있는 한 자리의 자연수는 모두 몇 개인가? [배점 5, 중상]

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 수의 최대공약수는 $3 \times x$,
공약수, 즉 최대공약수의 약수가 4 개이므로
최대공약수는 $a \times b$ (단, a, b 는 소수, $a \neq b$ 이다.)
또는 a^3 꼴이어야 한다.
따라서 x 가 될 수 있는 수는 2, 5, 7, 9 의 4 개이다.

11. 희정이는 1 과 100 사이의 자연수 중에서 $\frac{1}{3}$ 을 곱하여도, $\frac{1}{8}$ 을 곱하여도 항상 자연수가 되는 수가 모두 몇 개인가를 조사하려고 한다. 희정이가 찾은 자연수는 모두 몇 개인가? [배점 5, 중상]

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개

④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

구하는 수를 a 라 하면
 $\frac{1}{3} \times a = (\text{자연수})$, $\frac{1}{8} \times a = (\text{자연수})$ 가 되는 a 는 3 과 8 의 공배수이므로,
3 과 8 의 최소공배수는 24
따라서 24, 48, 72, 96 의 4 개

12. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여
 $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$ 이다.
 $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, $n(B) \times n(C)$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 9

해설

$(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = \emptyset$ 이면
 $A - B = \emptyset, B - C = \emptyset, C - A = \emptyset$,
 $A \subset B, B \subset C, C \subset A$ 이므로
 $A = B = C$
따라서 $n(B) = n(C) = 3$ 이므로 $n(B) \times n(C) = 9$

13. 세 자리의 자연수 중에서 일의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 A , 십의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 B , 일의 자리의 숫자가 4의 배수인 수의 집합을 C 라 할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

일의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합과 십의 자리 숫자가 4의 배수인 수의 집합, 일의 자리의 숫자가 4의 배수인 수의 집합의 교집합은 세 자리 모두 4의 배수인 수로 이루어진 수의 집합이다. 4의 배수가 될 수 있는 한 자리 수는 0, 4, 8이지만, 백의 자리에는 0이 올 수 없다.
 $\therefore n(A \cap B \cap C) = 2 \times 3 \times 3 = 18$

14. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k \text{인 자연수}\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2, 3, \dots, 20\}$
 $A_2 = \{3, 4, \dots, 40\}$
 $A_3 = \{4, 5, \dots, 60\}$
 $\vdots$
 $A_{10} = \{11, 12, 13, \dots, 200\}$
 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = \{11, 12, \dots, 20\}$
 $\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = 10$

15. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5인 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12개

해설

$\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중, 두 번째로 작은 원소가 5인 부분집합을 찾으려면, 5는 반드시 포함되고 1, 2, 3 중에 하나만 포함되어야 한다.
 (1) 1과 5는 포함되고, 2, 3은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
 (2) 2와 5는 포함되고, 1, 3은 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
 (3) 3과 5는 포함되고, 1, 2는 포함되지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-2} = 4$ (개)
 따라서 $4 + 4 + 4 = 12$ (개)