

단원 종합 평가

1. $\frac{686}{n} = a^2$ 을 만족하는 자연수 a 에 대하여 $a + n$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 조건을 만족하는 최소의 자연수) [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} 686 &= 2 \times 7^3 \\ n &= 14, \quad a = 7 \\ a + n &= 7 + 14 = 21 \end{aligned}$$

2. 두 분수 $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}$ 중 어느 것을 곱해도 자연수가 되는 100 이하의 자연수의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

두 분수가 자연수가 되려면, n 은 6 과 10 의 공배수이어야 한다.
공배수 중 가장 작은 수는 두 수의 최소공배수이어야 한다.
 n 의 값 중 가장 작은 수는 30 이다.
따라서 100 이하의 자연수이므로 30, 60, 90 이고 3 개이다.

3. 1부터 100까지의 자연수 중에서 5의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 수는 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 68 개

해설

1 부터 100 까지의 자연수 중에서 5 의 배수를 A_5 , 7 의 배수를 A_7 라 할 때,
 $100 = 5 \times 20, 100 = 7 \times 14 + 2$
 $n(A_5) = 20, n(A_7) = 14, n(A_5 \cap A_7) = n(A_{35}) = 2,$
5 의 배수이거나 7 의 배수인 수의 갯수
 $n(A_5 \cup A_7) = n(A_5) + n(A_7) - n(A_{35}) = 20 + 14 - 2 = 32(\text{개}),$
5 의 배수도 아니고 7 의 배수도 아닌 수의 갯수는
 $n((A \cup B)^c) = 100 - 32 = 68(\text{개})$

4. 3120 에서 1 이 나타내는 값은 $100_{(2)}$ 에서 1 이 나타내는 값의 몇 배인가? [배점 3, 중하]

- ① 2 배 ② 10 배 ③ 15 배
④ 20 배 ⑤ 25 배

해설

3120 의 1 은 100 을 나타내고, $100_{(2)}$ 의 1 은 $2^2 = 4$ 을 나타낸다.
 $100 \div 4 = 25$ (배)

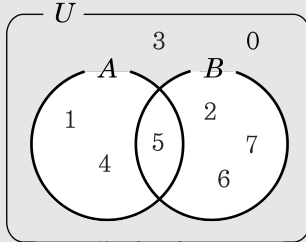
5. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A \cap B = \{5\}, (A \cup B)^c = \{0, 3\}, A - B = \{1, 4\}$ 일 때, $n(B - A)$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B - A = \{2, 6, 7\}$ 이므로 $n(B - A) = 3$

6. $2^3 + 1 < X < 2^4$ 인 수 X 를 이진법으로 나타내었을 때, 몇 자리의 수가 되는지 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 네 자리의 수

해설

$2^3 + 1 = 9 = 1001_{(2)}$, $2^4 = 10000_{(2)}$ 이므로
 $1001_{(2)} < X < 10000_{(2)}$
 따라서 X 를 이진법으로 나타내면 네 자리의 수이다.

7. 자연수 $2^2 \times 3 \times 5$ 의 약수 중에서 두 번째로 큰 수를 a , 세 번째로 큰 수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

[배점 4, 중중]

- ① 15 ② 30 ③ 50 ④ 60 ⑤ 75

해설

$2^2 \times 3 \times 5$ 의 약수 중 두 번째로 큰 수는 $2 \times 3 \times 5 = 30$, 세 번째로 큰 수는 $2^2 \times 5 = 20$ 이므로,
 $a + b = 30 + 20 = 50$ 이다.

8. 달리기 대회에서 기념품으로 수건 120 개, 스카프 144 개, 모자 156 개를 되도록 많은 참가자들에게 똑같이 나누어주려고 한다. 이 때, 한 명이 받게 되는 수건과 스카프, 모자의 개수로 옳은 것은? [배점 4, 중중]

- ① 5 개, 6 개, 9 개
 ② 6 개, 12 개, 18 개
 ③ 18 개, 12 개, 10 개
 ④ 12 개, 12 개, 12 개
 ⑤ 10 개, 12 개, 13 개

해설

참가자들의 수는

120, 144, 156의 최대공약수이므로 12

한 명이 받게 되는 수건, 스카프, 모자의 수는 각각

$120 \div 12 = 10$, $144 \div 12 = 12$, $156 \div 12 = 13$

9. 1부터 100까지의 자연수 중에서 3의 배수이거나 5의 배수인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 47 명

해설

1부터 100까지의 자연수의 집합을 U ,
 3의 배수의 집합을 A , 5의 배수의 집합을 B 라 하면

$n(U) = 100$, $n(A) = 33$, $n(B) = 20$, $n(A \cap B) = 6$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 33 + 20 - 6 = 47$

10. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

보기

$$\{1\} \subset B \subset A, n(B) = 3$$

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 3개

해설

$$A = \{1, 3, 9, 27\}$$

집합 B 는 원소 1을 포함한 집합 A 의 부분집합 중 원소의 개수가 3개인 집합이므로 $\{1, 3, 9\}$, $\{1, 3, 27\}$, $\{1, 9, 27\}$ 의 3개이다.

11. 두 집합 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합 $C = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in B\}$ 이다. 이때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은?

[배점 5, 중상]

- ① $\{0\}$ ② $\{0, 1\}$
 ③ $\{0, 1, 2\}$ ④ $\{0, 1, 2, 3\}$
 ⑤ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

해설

$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0, 1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3$ 이므로 $C = \{0, 1, 2, 3\}$ 이다.

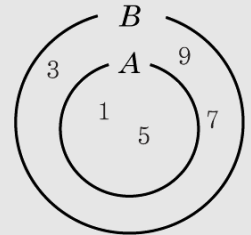
12. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B) = 2$, $B - A = \{3, 7, 9\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

해설

$$\begin{aligned} A &= \{1, 5\}, n(A \cap B) = 2 \text{ 이므로} \\ A \cap B &= A \\ \therefore A &\subset B \\ \therefore B &= \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$



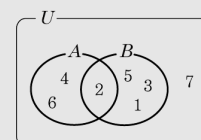
13. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, $B \cap A^c = \{1, 3, 5\}$, $A^c \cap B^c = \{7\}$ 일 때, A^c 은?

[배점 5, 중상]

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$
 ③ $\{1, 7\}$ ④ $\{3, 5, 7\}$
 ⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

해설

$B \cap A^c = \{7\} = B - A$ 이므로 $A^c = U - A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.



14. 어떤 세 자연수의 비가 $2:3:4$ 이고 최대공약수가 6 일 때, 세 자연수의 최소공배수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{array}{r} a) 2 \times a \quad 3 \times a \quad 4 \times a \\ 2) \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

최대공약수는 $a = 6$ 이고,

최소공배수는 $a \times 2^2 \times 3 = 6 \times 2^2 \times 3 = 72$ 이다.

15. 밑변의 길이가 $1011_{(2)}\text{cm}$, 높이가 $110_{(2)}\text{cm}$ 인 삼각형의 넓이를 십진법으로 나타내어라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 33cm^2

해설

$$(\text{밑변}) = 1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 8 + 2 + 1 = 11(\text{cm})$$

$$(\text{높이}) = 110_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 4 + 2 = 6(\text{cm})$$

$$\therefore (\text{넓이}) = 11 \times 6 \div 2 = 33(\text{cm}^2)$$

16. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 모든 부분집합의 원소의 합을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 136

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합은

$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$ 중에 원소 2, 3, 5, 7은 8 번씩 포함되므로 부분집합의 원소의 합은 $(2+3+5+7) \times 8 = 136$ 이다.

17. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 25 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$n(A \cap B) = 10, n(B^c) = 10, n(A^c \cap B^c) = 3$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$n(U) = 25$ 이므로

$$n(B) = n(U) -$$

$$n(B^c) = 25 - 10 =$$

$$15$$

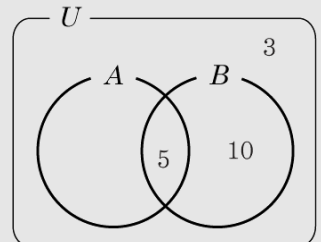
$$A^c \cap B = B - A \text{ 이}$$

므로

$$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 10$$

$$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 3$$

벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서 $n(A - B) = 25 - (5 + 10 + 3) = 7$ 이다.



18. 집합 $S = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x \mid x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 가 있다. 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3개

해설

자연수 전체집합의 부분집합인 A 가
 $A = \{x \mid x \in A \text{이면 } 5 - x \in A\}$ 라는 조건을 가
 질 때,
 집합 A 의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4
 이다.
 조건을 이용하면 1 과 4, 2 와 3 은 반드시 동시에
 원소가 되어야 하므로
 집합 A 는 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 3 개의
 경우가 가능하다.

19. 전체집합 $U = \{x \mid x \leq 100 \text{인 자연수}\}$ 의 세
 부분집합

$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$,
 $C = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$ 에 대하여
 $n((A^c \cap B) \cup (A - C))$ 를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 32

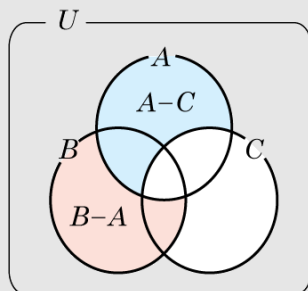
해설

$A^c \cap B = B - A$ 이
 므로 $(B - A) \cap (A - C) = \emptyset$

$\therefore n((A^c \cap B) \cup (A - C)) = n(A^c \cap B) +$
 $n(A - C)$

$n(A^c \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(B \cap A)$
 $= 20 - 5 = 15$

$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 25 - 8 = 17$
 $\therefore 15 + 17 = 32$



20. 두 집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여
 집합 $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 일 때, 집합 C 의
 원소의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8개

해설

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 이고 집합 $C =$
 $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ 라면,
 집합 A, B 의 원소를 하나씩 서로 곱한 값이 집합
 C 의 원소가 된다.
 따라서 집합 $C = \{2, 4, 6, 10, 12, 18, 20, 30\}$
 이므로 $n(C) = 8$

21. 우리 반 학생 36 명 중 개를 키우는 학생은 15 명,
 고양이를 키우는 학생은 18 명이다. 개만 키우는
 학생이 8 명일 때, 개도 고양이도 키우지 않는 학생의
 수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 10 명

해설

우리 반 학생의 집합을 U , 개를 키우는 학생의 집
 합을 A , 고양이를 키우는 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 36$, $n(A) = 15$, $n(B) = 18$
 $n(A - B) = 8$
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ 이므로
 $8 = 15 - n(A \cap B)$, $n(A \cap B) = 7$
 $n(A \cup B)$
 $= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 18 - 7 = 26$
 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 36 - 26 = 10$

22. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

- (1) $B \subset A$
(2) B 의 원소의 개수는 3 개 이하이다.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 42 개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

원소의 개수가 3 이하인 집합 A 의 부분집합은 다음과 같다.

원소가 0 개인 부분집합 : $\emptyset$

원소가 1 개인 부분집합 :

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{12\}$

원소가 2 개인 부분집합 :

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 12\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 12\}, \{3, 4\},$
 $\{3, 6\}, \{3, 12\}, \{4, 6\}, \{4, 12\}, \{6, 12\}$

원소가 3 개인 부분집합 :

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 12\},$
 $\{1, 3, 4\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 12\}, \{1, 4, 6\},$
 $\{1, 4, 12\}, \{1, 6, 12\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\},$
 $\{2, 3, 12\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 12\}, \{2, 6, 12\},$
 $\{3, 4, 6\}, \{3, 4, 12\}, \{3, 6, 12\}, \{4, 6, 12\}$

23. 어느 학급에서 ‘자주 먹는 고기의 종류’ 를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31 명, 돼지고기를 선택한 학생은 27 명, 소고기를 선택한 학생은 23 명이였다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14 명은 닭고기를, 15 명은 돼지고기를, 9 명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7 명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 56 명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,

$$\text{닭고기만을 선택한 학생 수는 } n(A) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 14 ,$$

$$\text{돼지고기만을 선택한 학생 수는 } n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 15 ,$$

$$\text{소고기만을 선택한 학생 수는 } n(C) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 9 ,$$

위의 세 식을 모두 더하면,

$$n(A) + n(B) + n(C) - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 3n(A \cap B \cap C) = 38 ,$$

$$n(A) = 31, n(B) = 27, n(C) = 23, n(A \cap B \cap C) = 7 \text{ 이므로}$$

$$31 + 27 + 23 - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 21 = 38$$

$$\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 32$$

모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,

$$\begin{aligned} n(U) &= n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ &\quad (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 31 + 27 + 23 - 32 + 7 = 56 \end{aligned}$$

24. 400 보다 작은 자연수 전체의 집합의 부분집합

$$A_k = \{x | x \text{는 } k \text{의 배수}\},$$

$B = \{x | x \in A_5, x \notin A_2, x \notin A_3, x \notin A_4\}$ 에 대하여 $n(B)$ 를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$B = \{x | x \in A_5, x \notin A_2, x \notin A_3, x \notin A_4\}$ 를 보면,

B 의 원소는 5 의 배수이면서, 2, 3, 4 의 배수가 아닌 수이다.

$A_4 \subset A_2$ 이므로, B 의 원소는 결국 5 의 배수이면서 2, 3 의 배수가 아닌 수이다.

$$\begin{aligned} \therefore n(B) &= n(A_5) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_3 \cap A_5) \\ &\quad + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5) \\ &= 80 - 40 - 26 + 13 = 27 \end{aligned}$$

25. $\frac{85+x}{210}$ 를 약분하여 기약분수로 만들었더니 분자가 7 의 배수였다. 이것을 만족하는 자연수 x 중 가장 작은 수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ 이므로,

$\frac{85+x}{210}$ 를 약분하여 기약분수로 만들었더니 분자가 7 의 배수였다는 것은,

$85+x = 7^2 \times a$ 의 형태가 된다는 뜻이다.

$\therefore x$ 중 가장 작은 수 = 13