

단원 종합 평가

1. 다음 중 그래프가 아래로 볼록인 것을 모두 찾으려면?
[배점 3, 중하]

- ① $y = 2x^2$ ② $y = \frac{1}{3}x^2$
③ $y = -4x^2$ ④ $y = \frac{2}{3}x^2$
⑤ $y = -\frac{3}{4}x^2$

해설

$y = ax^2$ 에서 $a > 0$ 이면 아래로 볼록이다.

- ① $y = 2x^2$ 에서 $2 > 0$ 이므로 아래로 볼록이다.
② $y = \frac{1}{3}x^2$ 에서 $\frac{1}{3} > 0$ 이므로 아래로 볼록이다.
④ $y = \frac{2}{3}x^2$ 에서 $\frac{2}{3} > 0$ 이므로 아래로 볼록이다.

2. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax + 5$ 는 $x = 2$ 일 때, 최댓값 b 를 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 11

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2ax + 5 \\ &= -(x-a)^2 + a^2 + 5 \\ x = a \text{ 일 때, 최댓값 } a^2 + 5 \text{ 를 가지므로 } a &= 2 \\ a^2 + 5 = b, b &= 9 \\ \therefore a + b &= 11 \end{aligned}$$

3. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프가 제 3사분면 위의 점 $(a, 3a)$ 를 지날 때, $2a$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

- ① -3 ② 3 ③ -4 ④ 4 ⑤ -2

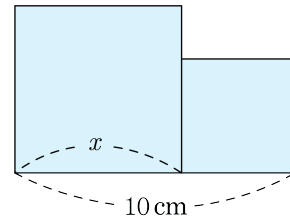
해설

$$3a = -2a^2, 2a \left(a + \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{3}{2}$$

따라서 점 $(a, 3a)$ 가 제 3 사분면 위의 점이므로 $2a = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$ 이다.

4. 다음 그림과 같이 길이가 10cm 인 선분을 둘로 나누어 각각을 한 변으로 하는 두 정사각형을 만들려고 한다. 이 때, 두 정사각형의 넓이의 합을 최솟값을 구하여라.



[배점 4, 중중]

- ① 20 ② 30 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

한 정사각형의 한 변의 길이를 x cm, 다른 한 정사각형의 한 변의 길이를 $(10 - x)$ cm 라고 놓으면,
 $y = x^2 + (10 - x)^2$
 $= 2x^2 - 20x + 100$
 $= 2(x - 5)^2 - 50$
따라서 최솟값은 $50(\text{cm}^2)$ 이다.

5. 둘레의 길이가 48m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면? [배점 4, 중중]

- ① 81m^2 ② 100m^2 ③ 121m^2
④ 144m^2 ⑤ 169m^2

해설

가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 $(24 - x)$ m, 넓이를 y m² 라 하면

$$y = x(24 - x)$$

$$= -x^2 + 24x$$

$$= -(x^2 - 24x + 144 - 144)$$

$$= -(x - 12)^2 + 144$$

따라서 $x = 12$ 일 때 넓이의 최댓값은 144 m² 이다.

6. 이차함수 $y = a(x + 3)^2 - 2$ 의 그래프는 이차함수 $y = -(x + b)^2 + c$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다. 이 때, 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값은?

[배점 5, 중상]

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$y = -(x + 5 + b)^2 + c - 4 = a(x + 3)^2 - 2 \text{ 에서}$$

$$a = -1, \quad 5 + b = 3, \quad c - 4 = -2$$

$$\therefore a = -1, \quad b = -2, \quad c = 2$$

따라서 $a + b + c = -1$ 이다.

7. 이차함수 $f : R \rightarrow R$ 에서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ 이다. $f(2a) = 2a - 1$ 일 때, 상수 a 의 값은? (단, R 은 실수)

[배점 5, 중상]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

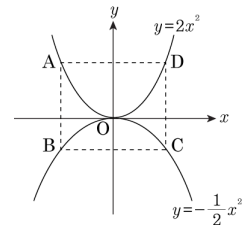
해설

$$f(2a) = 2a - 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times (2a)^2 - 2a + 1 = 2a - 1, \quad 2a^2 - 4a + 2 = 0, \quad a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a - 1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

8. 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위에 있는 네 점 A, B, C, D 가 정사각형을 이룰 때, 점 D 의 x 좌표는?



[배점 5, 중상]

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

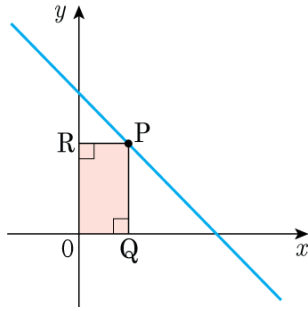
점 D 의 좌표를 $(a, 2a^2)$ 이라고 하면

$$A(-a, 2a^2), \quad B\left(-a, -\frac{1}{2}a^2\right), \quad C\left(a, -\frac{1}{2}a^2\right)$$

이고, $\overline{DC} = \overline{BC}$ 이므로

$$2a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 2a, \quad 5a^2 = 4a, \quad a = \frac{4}{5} \quad (\because a \neq 0)$$

9. 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -\frac{3}{2}a + 3$

$$\begin{aligned}\square OQPR &= ab = a \left(-\frac{3}{2}a + 3 \right) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + 3a \\ &= -\frac{3}{2}(a-1)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -\frac{3}{2}a + 3 > 0 \quad \therefore 0 < a < 2$$

따라서 $\square OQPR$ 의 넓이는 $a = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

10. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y 좌표의 값이 모두 정수인 점의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 163 개

해설

$y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-8, 16), (8, 16)$

둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-8 \leq x \leq 8$ 이므로 이 범위 안의 정수는 $-8, -7, \dots, 7, 8$ 의 17 개가 있다. 따라서

x 좌표가 -8 일 때 : 1 개

x 좌표가 -7 일 때 :

y 좌표는 13 부터 16 까지이므로 4 개

x 좌표가 -6 일 때 :

y 좌표는 9 부터 16 까지이므로 8 개

x 좌표가 -5 일 때 :

y 좌표는 7 부터 16 까지이므로 10 개

x 좌표가 -4 일 때 :

y 좌표는 4 부터 16 까지이므로 13 개

x 좌표가 -3 일 때 :

y 좌표는 3 부터 16 까지이므로 14 개

x 좌표가 -2 일 때 :

y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개

x 좌표가 -1 일 때 :

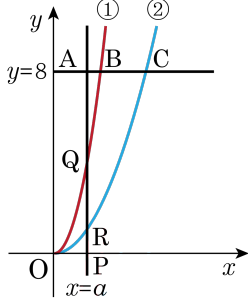
y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개

x 좌표가 0 일 때 : 1 개

$$\therefore 2 \times (4 + 8 + 10 + 13 + 14 + 16 + 16) + 1 = 163 \text{ (개)}$$

11. 다음 그림은 이차함수

$y = 2x^2(x \geq 0) \cdots \textcircled{1}$, $y = \frac{1}{2}x^2(x \geq 0) \cdots \textcircled{2}$ 의
그래프이다. 직선 $y = 8$ 이 y 축 및 곡선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 와 점
A, B, C에서 만나고 $x = a$ 가 x 축 및 곡선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 와
점 P, Q, R에서 만날 때, 원점과 점 C를 지나는
직선이 곡선 $\textcircled{1}$ 과 만나는 점의 좌표를 (p, q) 라 하자.
이 때 $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, 원점은 제외)



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

$\overline{OC}$ 의 식은 $y = 2x$

$2x^2 = 2x, x^2 - x = 0, x(x - 1) = 0$ 에서 $x = 0$
또는 $x = 1$

$\therefore (p, q) = (1, 2) (\because x \neq 0)$

$\therefore p + q = 1 + 2 = 3$

12. x 축 위의 두 점 A(5, 0), B(-3, 0)과 이차함수

$y = a(x + 1)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -12$ 와의 두
교점 C, D를 연결한 사각형은 평행사변형일 때, 상수
 a 의 값을 구하여라. (단, $a < 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

$\square ABCD$ 는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의
길이가 같다.

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 8$$

점 C와 D는 직선 $x = -1$ 을 중심으로 좌우대칭
이므로 B(-5, -12), C(3, -12)

점 C와 점 D는 $y = a(x + 1)^2$ 위의 점이므로

$$-12 = 16a$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

13. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$
일 때, 최솟값 4를 갖는 이차함수의 식은?

[배점 5, 상하]

① $y = 2(x - 1)^2$

② $y = 2(x - 1)^2 + 4$

③ $y = 2(x + 1)^2 + 4$

④ $y = -2(x + 1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x - 1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이
 $(-1, 4)$ 이므로 $y = 2(x + 1)^2 + 4$

14. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 좌표평면
위의 모든 사분면을 지나도록 하는 조건을 빠짐없이
찾아라. [배점 6, 상중]

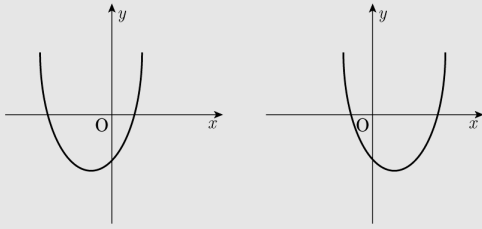
▶ 답 :

▶ 정답 : $c < 0$

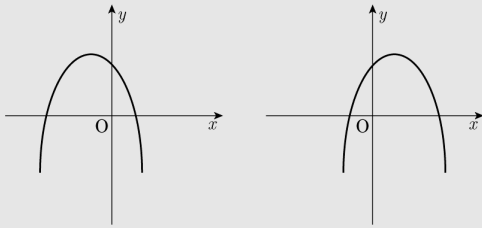
▶ 정답 : $0 > c$

해설

(1) $a > 0$ 인 경우 $ac < 0$



(2) $a < 0$ 인 경우 $ac > 0$



따라서 (1), (2)에서 $c < 0$ 이다.

15. 세 이차함수 $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 1)^2$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

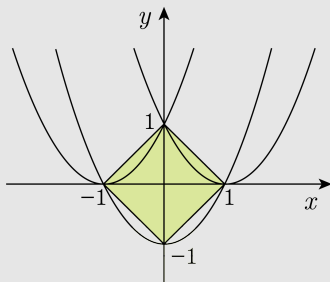
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

세 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로 세 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이다.