단원 종합 평가

1. 이차방정식 $x^2+(k-1)x+\frac{9}{16}=0$ 이 중근을 가질 때, 양수 k 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=\frac{5}{2}$

해설

$x^2+(k-1)x+\frac{9}{16}=0$

i) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=0,\ x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0$

$-\frac{3}{2}=k-1 \quad \therefore\ k=-\frac{1}{2}$

ii) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=0,\ x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0$

$\frac{3}{2}=k-1 \quad \therefore\ k=\frac{5}{2}$

따라서 k 는 양수이므로 $k=\frac{5}{2}$

2. 이차방정식 $x^2+(a-1)x-a=0$ 의 한 근이 12 일 때, a 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

한 근이 12 이므로 주어진 식에 x 대신 12 를 대입하면

$12^2+(a-1)\times 12-a=0$

$132+11a=0 \quad \therefore a=-12$

3. 다음 이차방정식 중 중근을 갖는 것을 모두 고르면? [배점 3, 중하]

① $2x^2+4x+2=0$

② $x^2+10x+25=0$

③ $3x^2-7x+2=0$

④ $10(x-1)=x^2+11$

⑤ $(x-3)^2=4$

해설

① $2x^2+4x+2=0$ 에서 $2(x^2+2x+1)=0, 2(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

② $x^2+10x+25=0$ 에서 $(x+5)^2=0$

$\therefore x=-5$

③ $3x^2-7x+2=0$ 에서 $(3x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

④ $10(x-1)=x^2+11$ 에서 $x^2-10x+21=0, (x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=7$

⑤ $(x-3)^2=4$ 에서 $x^2-6x+5=0, (x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

4. 이차방정식 $2(x+1)^2=10$ 의 두 근의 합을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$2(x+1)^2 = 10$

$(x+1)^2 = 5$

$x+1 = \pm\sqrt{5}$

$x = -1 \pm \sqrt{5}$

$\therefore\ (-1+\sqrt{5}) + (-1-\sqrt{5}) = -2$

5. $(x^2-4x)^2 - (x^2-4x) - 20 = 0$ 의 해를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -1$

▷ 정답: $x = 2$

▷ 정답: $x = 5$

해설

$x^2 - 4x = A$ 로 놓으면

$A^2 - A - 20 = 0, \quad (A-5)(A+4) = 0$

$A = 5$ 또는 $A = -4$

(i) $x^2 - 4x = 5,\ x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$\therefore x = 5$ 또는 $x = -1$

(i) $x^2 - 4x = -4,\ x^2 - 4x + 4 = 0\,(x-2)^2 = 0$

$\therefore x = 2$

6. 다음과 같은 이차방정식이 근을 갖지 않도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

$(2x+5)^2 = \dfrac{m+6}{4}$

[배점 4, 중중]

① $m > 3$ ② $m < -6$ ③ $m = 0$

④ $m < 3$ ⑤ $m > -6$

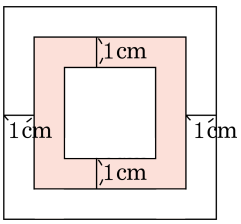
해설

$\dfrac{m+6}{4} < 0$ 이어야 하므로

$m + 6 < 0$

$\therefore m < -6$

7. 다음 그림과 같이 정사각형 세 개가 포개어져 있다. 가장 큰 정사각형의 넓이가 나머지 두 정사각형의 넓이의 합과 같을 때, 색칠한 부분의 넓이는?



[배점 4, 중중]

① 7cm^2 ② 16cm^2 ③ 28cm^2

④ 30cm^2 ⑤ 36cm^2

해설

가운데 정사각형의 한 변을 $x\,\mathrm{cm}$ 라 하면 가장 큰 사각형의 한 변은 $(x+2)\,\mathrm{cm}$, 가장 작은 사각형의 한 변은 $(x-2)\,\mathrm{cm}$ 가 된다.

$(x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2$

$x^2 - 8x = 0, x(x-8) = 0$

$x = 0,\ 8$ 에서 $x > 0$ 이므로 $x = 8$

즉 가운데 정사각형의 한 변은 $8\,\mathrm{cm}$, 가장 작은 정사각형의 한 변은 $8-2=6(\,\mathrm{cm})$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이는 $8^2 - 6^2 = 28(\,\mathrm{cm}^2)$ 이다.

8. 이차방정식 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근 중에서 양수를 a 라 할 때, $n < a < n+1$ 을 만족하는 정수 n 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근은 $x = -2 \pm \sqrt{5}$

a 는 양수이므로 $a = -2 + \sqrt{5}$

$0 < -2 + \sqrt{5} < 1 \therefore n = 0$

9. 연속하는 3개의 양의 홀수를 제곱하여 더한 것이 251 일 때, 이 연속하는 세 홀수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 11

해설

연속하는 세 홀수를 $x-2,\ x,\ x+2$ 라고 하면,

$(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 251$

$3x^2 + 8 = 251, x = \pm 9, x > 0$이므로$x = 9$

$\therefore$ 연속하는 세 홀수 : $7, 9, 11$

10. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - 10x + a = 0$ 의 한 근이 $5 + \sqrt{3}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

다른 한 근이 $5 - \sqrt{3}$ 이므로

$(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) = a$에서

$a = 22$

11. 두 집합 $A=\{x \mid (3x-2)(x-4)=0\}$, $B=\{x \mid (3x+1)(x-4)=0\}$에 대하여 집합 $B-A$를 구하면? [배점 5, 중상]

① $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ ② $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ③ $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
④ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ⑤ $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

해설

$A=\{x \mid (3x-2)(x-4)=0\}$이므로 $A=\left\{\frac{2}{3},\ 4\right\}$
$B=\{x \mid (3x+1)(x-4)=0\}$이므로 $B=\left\{-\frac{1}{3},\ 4\right\}$
$\therefore\ B-A=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

12. $x^2+ax+b=0$에서 계수 a, b를 정하기 위하여 주사위를 던져서 나오는 첫 번째의 수를 a, 두 번째의 수를 b라 한다. 이 때, 이 이차방정식이 중근을 가지는 확률은? [배점 5, 중상]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

해설

중근을 가지려면 $x^2+ax+b=0$이 완전제곱식이 되어야 하므로 $\left(a\times\frac{1}{2}\right)^2=b$이다.
$a^2=4b$를 만족하는 $(a,\ b)$를 구하면 $(a,\ b)=(2,\ 1),\ (4,\ 4)$의 두 가지이고 모든 경우의 수는 36 가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ 이다.

13. 이차방정식 $2(x+k)^2=m$의 근이 $x=4\pm\sqrt{5}$ 이다. 이때, $(k+m)^2$의 값을 구하여라.(단, k, m은 유리수) [배점 5, 중상]

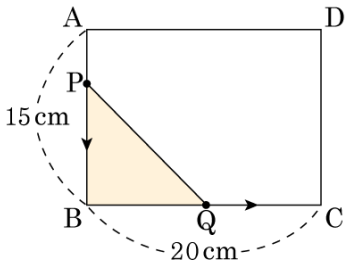
▶ 답:

▷ 정답: 36

해설

$2(x+k)^2=m,\ (x+k)^2=\frac{m}{2}$
$x=-k\pm\sqrt{\frac{m}{2}}=4\pm\sqrt{5}$
$\therefore k=-4,\ m=10$
$\therefore (k+m)^2=(-4+10)^2=36$

14. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=15\,\text{cm}$, $\overline{BC}=20\,\text{cm}$ 인 직사각형 ABCD 가 있다. 점 P 는 변 AB 위를 점 A 로부터 B 까지 매초 1 cm 의 속력으로 움직이고, 점 Q 는 변 BC 위를 점 B 로부터 C 까지 매초 2 cm 의 속력으로 움직이고 있다. 두 점 P, Q 가 동시에 출발하였다면 몇 초 후에 $\triangle BPQ$ 의 넓이가 $36\,\text{cm}^2$ 가 되는지 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 3 초

해설

x초 후에 $\overline{\mathrm{PB}} = (15-x)\,\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{BQ}} = 2x\,\mathrm{cm}$ $\triangle$BPQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PB}} \times \overline{\mathrm{BQ}}$ 이므로

$\frac{1}{2}(15-x)2x = 36$

$2x^2 - 30x + 72 = 0$

$x^2 - 15x + 36 = 0$

$(x-3)(x-12) = 0$

$\therefore\ x = 3$ (초)(단, $0 < x < 10$)

15. 이차방정식 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 2 인 이차방정식은? [배점 5, 중상]

① $2x^2 - 2x + 8 = 0$ ② $2x^2 - 8x + 4 = 0$

③ $2x^2 + 4x - 8 = 0$ ④ $2x^2 - x - 4 = 0$

⑤ $2x^2 + 2x - 8 = 0$

해설

$\alpha + \beta = -3$, $\alpha\beta = -2$

구하는 이차방정식에서

두 근의 합은 $(\alpha+1) + (\beta+1) = -1$

두 근의 곱은 $(\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta+\alpha+\beta+1 = -4$

$\therefore\ x^2 + x - 4 = 0$

이차항의 계수가 2 이므로 $2x^2 + 2x - 8 = 0$

16. 직선 $y = ax + b$ 의 그래프가 2, 3, 4 분면을 지날 때, x 에 대한 이차방정식$ax^2 + bx + 1 = 0$ 근의 개수에 대한 설명으로 옳은 것은? [배점 5, 중상]

① 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② 하나의 중근을 갖는다.

③ 근은 존재하지 않는다.

④ 근의 개수는 무한하다.

⑤ 알 수 없다.

해설

직선 $y = ax + b$ 의 기울기와 y 절편이 모두 음수 이므로 $a < 0$, $b < 0$,

$ax^2 + bx + 1 = 0$ 에서 $D = b^2 - 4a > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

17. 놀이동산의 입장 요금을 x% 인상하면 입장객은 $0.8x$% 줄어든다고 한다. 요금을 올리기 전보다 수입이 10% 가 줄어들 때의 요금 인상률은? [배점 5, 중상]

① 40% ② 45% ③ 50%

④ 55% ⑤ 60%

해설

인상 전의 입장요금을 A 원, 입장객 수를 B 명, 요금 인상률을 $x\%$ 라 하면

인상 후의 요금은 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원, 입장객 수는 $B\left(1-\frac{8x}{1000}\right)$ 명, 입장 수입은 $A \times B \times \left(1-\frac{10}{100}\right)$

$A\left(1+\frac{x}{100}\right) \times B\left(1-\frac{8x}{1000}\right)$

$= A \times B \times \left(1-\frac{10}{100}\right)$

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{8x}{1000}\right) = \left(1-\frac{10}{100}\right)$

$x^2 - 25x + 1250 = 0$

$(x-50)(x+25) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 50$

18. 이차방정식 $x^2 + 2x + A = 0$ 의 근이 $x = 2$ 또는 $x = -4$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

① -8 ② -6 ③ -2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$(x-2)(x+4) = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$, $A = -8$

19. 다음은 이차방정식에 관한 설명이다. ☐ 안에 알맞은 말을 써라.

방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (이차식) $= 0$ 의 모양으로 되는 식을 ☐ 이라고 한다.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 이차방정식

해설

(이차식) $= 0$ 의 형태를 이차방정식이라 한다.

20. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, 두 근의 합과 곱을 구하여라.

	두 근의 합	두 근의 곱
$x^2-2x+6=0$		
$x^2+5x+1=0$		
$2x^2+4x+3=0$		

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 풀이 참조

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 에서 두 근을 α, β 라고 할 때, 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이므로

	두 근의 합	두 근의 곱
$x^2-2x+6=0$	2	6
$x^2+5x+1=0$	-5	1
$2x^2+4x+3=0$	-2	$\frac{3}{2}$

21. 자연수 n 에 대하여 $x^2 - \frac{x}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + 1 = 0$ 의 두 근을 p_n, q_n 이라 할 때,

$(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_{100}) + (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots q_{100})$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{101} - 1$

해설

근과 계수의 관계에서

$p_n + q_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$\therefore\ (p_1+p_2+p_3+\cdots p_{100})+(q_1+q_2+q_3+\cdots q_{100})$

$= (p_1+q_1)+(p_2+q_2)+(p_3+q_3)+\cdots+(p_{100}+q_{100})$

$= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{101}-\sqrt{100}$

$= \sqrt{101}-1$

22. 원가가 A 원인 어떤 물건에 $x\%$ 의 이익을 붙여 정가를 매겼다가 다시 정가의 $x\%$ 를 할인하여 팔면 $\dfrac{A}{25}$ 원의 손해를 보게 된다. 이때 x 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

원가 A 원에 $x\,\%$ 의 이익을 붙이면 정가는 $A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$ 원이고, 다시 정가의 $x\,\%$ 를 할인하면 판매가는 $A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$ 원이다.

이때 $\dfrac{A}{25}$ 원의 손해를 보았으므로

(판매가) $-$ (원가) $= -\dfrac{A}{25}$ 에서

$A\left(1+\dfrac{x}{100}\right)\left(1-\dfrac{x}{100}\right) - A = -\dfrac{A}{25}$

$A\left(1-\dfrac{x^2}{10000}\right) = \dfrac{24}{25}A$

$1-\dfrac{x^2}{10000} = \dfrac{24}{25}$

$\therefore\ x = \pm 20$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 20$ 이다.

23. 이차방정식 $2x^2 - 6x + (1+a) = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

x 는 정수이므로 주어진 이차방정식은 실근을 가져야 한다.

$\dfrac{D}{4} = (-3)^2 - 2(1+a) \geq 0,\ 9-2-2a \geq 0,\ 7-2a \geq 0$

$\therefore\ a \leq \dfrac{7}{2}$

a 는 자연수이므로 1, 2, 3 중 하나이다.

(1) $a = 1$ 일 때, $2x^2 - 6x + 2 = 0$ 근이 정수가 되지 않으므로 부적합하다.

(2) $a = 2$ 일 때, $2x^2 - 6x + 3 = 0$ 근이 정수가 되지 않으므로 부적합하다.

(3) $a = 3$ 일 때, $2x^2 - 6x + 4 = 0,\ x^2 - 3x + 2 = 0,\ (x-1)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$ 따라서, (1), (2), (3) 에서 구하는 a 의 값은 3 이다.

24. $\dfrac{1}{2xy} + \dfrac{5y-1}{x} + \dfrac{x}{2y} - 3 = 0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

▷ 정답 : $y = 1$

해설

$\frac{1}{2xy}+\frac{5y-1}{x}+\frac{x}{2y}-3=0$을 정리하면

$x^2-6yx+10y^2-2y+1=0 \cdots$㉠

근의 공식에서

$x=3y\pm\sqrt{9y^2-10y^2+2y-1}$

$\therefore\ x=3y\pm\sqrt{-y^2+2y-1}$

이때, $x,\ y$ 는 실수이므로 $-y^2+2y-1\geq 0$ 이어야 한다.

즉, $y^2-2y+1=(y-1)^2\leq 0\ \therefore\ y=1$

㉠ 에서 $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$\therefore\ x=3$

따라서 $x=3,\ y=1$ 이다.

해설

$\overline{AD}=x,\ \overline{AB}=y$ 라 하면

$\triangle ABP=\frac{1}{2}y\times\overline{AP}=2.5 \quad \therefore\ \overline{AP}=\frac{5}{y}$

$\triangle BCQ=\frac{1}{2}x\times\overline{QC}=4 \quad \therefore\ \overline{QC}=\frac{8}{x}$

따라서 $\triangle PQD=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{y}\right)\left(y-\frac{8}{x}\right)=4.5$

$\left(\frac{xy-5}{y}\right)\left(\frac{xy-8}{x}\right)=9$

$(xy-5)(xy-8)=9xy$

$(xy)^2-22xy+40=0$

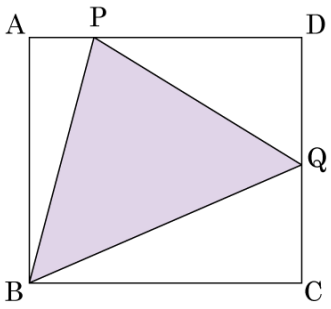
$(xy-2)(xy-20)=0$

$\therefore\ xy=2$ 또는 $xy=20$

그런데 $xy>11$ 이므로 $xy=20$

$\therefore\ \triangle PBQ=20-11=9$

25. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 에서 점 P 는 선분 AD 위에 있고, 점 Q 는 선분 CD 위에 있다. 삼각형 ABP, PDQ, BCQ 의 넓이가 각각 2.5, 4.5, 4 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 9