단원 종합 평가

1. x 의 값이 $x>0$ 일 때, $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x+4)^2}$ 을 간단히 하면? [배점 3, 중하]

① 3　② $2x+5$　③ $x+5$
④ $2x$　⑤ $x-3$

해설
$x>0$ 이므로 $\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x+4)^2}=(x+1)+(x+4)=2x+5$

2. $\sqrt{15}<\sqrt{2x}<\sqrt{250}$ 을 만족하는 x 중에서 $\sqrt{2x}$ 가 자연수가 되도록 하는 x 는 몇 개인지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설
$\sqrt{15}<\sqrt{2x}<\sqrt{250}\rightarrow 7.5<x<125$
$\sqrt{2x}$ 가 자연수가 되려면
$x=2\times$(제곱수) 이어야 한다.
조건에 맞는 x 의 값을 구하면
$8, 18, 32, 50, 72, 98$ 이다.

3. 다음에 주어진 수를 크기가 작은 것부터 차례로 나열할 때, 세 번째에 해당하는 것은? [배점 3, 중하]

① $\sqrt{5}+\sqrt{2}$　② $-\sqrt{5}$　③ -2
④ $\sqrt{5}+1$　⑤ $-2-\sqrt{5}$

해설
양수는 음수보다 크므로 양수는 양수끼리, 음수는 음수끼리 비교한다.
i) $-\sqrt{5}-(-2)=-\sqrt{5}+\sqrt{4}<0$
　$\therefore\ -\sqrt{5}<-2$
ii) $-\sqrt{5}-(-2-\sqrt{5})=2>0$
　$\therefore\ -\sqrt{5}>-2-\sqrt{5}$
iii) $\sqrt{5}+\sqrt{2}-(\sqrt{5}+1)=\sqrt{2}-1>0$
　$\therefore\ \sqrt{5}+\sqrt{2}>\sqrt{5}+1$
따라서 주어진 수의 순서는
$-2-\sqrt{5}<-\sqrt{5}<-2<\sqrt{5}+1<\sqrt{5}+\sqrt{2}$

4. $a=\sqrt{32}-\dfrac{12}{\sqrt{8}}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{12}}{3\sqrt{6}}$
일 때, $\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설
$a=4\sqrt{2}-\dfrac{6}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\sqrt{2}$
$b=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{6\sqrt{2}}{18}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$
$\therefore \dfrac{a}{b}=\sqrt{2}\div\dfrac{\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}\times\dfrac{6}{\sqrt{2}}=6$

5. $3\sqrt{3}$ 의 소수 부분을 a , 정수 부분을 b 라 할 때, $a-b$ 의 값은? [배점 3, 중하]

① $\sqrt{3}-5$　② $3\sqrt{3}-5$　③ $\sqrt{3}-9$
④ $3\sqrt{3}-9$　⑤ $3\sqrt{3}-10$

해설

$3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, $5 < \sqrt{27} < 6$ 이므로
$3\sqrt{3}$ 의 정수 부분 $b = 5$
소수 부분 $a = 3\sqrt{3} - 5$
$\therefore a - b = (3\sqrt{3} - 5) - 5 = 3\sqrt{3} - 10$

6. $\sqrt{\frac{x}{3}}$ 가 정수가 되게 하는 x 의 값 중 두 자리 정수는 모두 몇 개인가? [배점 4, 중중]

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개
④ 7 개 ⑤ 3 개

해설

$10 \le x \le 99$, $x = 3k^2$(k : 정수)이므로 $x = 3 \times 2^2, 3 \times \times 3^2, 3 \times 4^2, 3 \times 5^2$
$x = 12,\ 27,\ 48,\ 75$
$\therefore$ 4개

7. $-1 < a < 2$ 일 때, $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-2)^2} + a - 3$ 을 간단히 하면? [배점 4, 중중]

① a ② $3a - 4$ ③ 0
④ $a - 6$ ⑤ $3a + 1$

해설

$-1 < a < 2$ 에서 $a + 1 > 0$, $a - 2 < 0$ 이므로
(준식)$= a + 1 - (a - 2) + a - 3 = a$

8. $A = 5\sqrt{2} - 2$, $B = 3\sqrt{2} + 1$, $C = 4\sqrt{3} - 2$ 일 때, 다음 중 대소 관계가 옳은 것은? [배점 4, 중중]

① $A > B > C$ ② $A > C > B$
③ $B > A > C$ ④ $B > C > A$
⑤ $C > A > B$

해설

$A - B = 2\sqrt{2} - 3 < 0$ 이므로 $A < B$
$A - C = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} > 0$ 이므로 $A > C$
$\therefore B > A > C$

9. $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{a} = 3 \times \sqrt{6}$ 를 만족하는 양의 유리수 a 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

해설

좌변 $= \sqrt{4 \times 3 \times a}$, 우변 $= \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{54}$,
$4 \times 3 \times a = 54$
$\therefore a = \frac{9}{2}$

10. 다음 중 $\sqrt{60}$ 의 근삿값과 숫자 배열이 같은 것을 모두 고르면? [배점 4, 중중]

① $\sqrt{0.6}$ ② $\sqrt{600}$ ③ $\sqrt{6000}$
④ $\sqrt{60000}$ ⑤ $\sqrt{0.0006}$

해설

$\sqrt{60}$ 이 들어가는 형태로 표현할 수 있으면 $\sqrt{60}$ 과 숫자 배열이 같은 수이다.

$\sqrt{0.6}=\sqrt{\frac{6}{10}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{60}}{10}$

$\sqrt{600}=10\sqrt{6}$

$\sqrt{6000}=10\sqrt{60}$

$\sqrt{60000}=100\sqrt{6}$

$\sqrt{0.0006}=\sqrt{\frac{6}{10000}}=\frac{\sqrt{6}}{100}$

②, ④, ⑤는 $\sqrt{6}$ 과 숫자 배열이 같은 수

11. $5x+y=15$ 일 때, $\sqrt{2x+y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 자연수 x는? [배점 5, 중상]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 7 ⑤ 9

해설

$5x+y=15 \Rightarrow y=15-5x$

$\sqrt{2x+y}=\sqrt{2x+15-5x}=\sqrt{15-3x}$

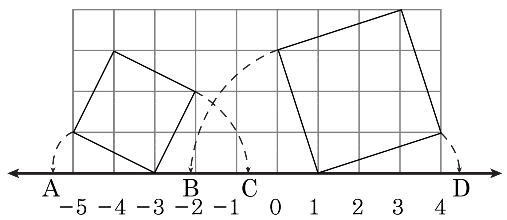
x 가 가장 작은 자연수가 되려면 근호 안의 수는 15 미만의 가장 큰 제곱수가 되어야 하므로 9가 되어야 한다.

$\sqrt{15-3x}=\sqrt{9}$

$15-3x=9$

$\therefore\ x=2$

12. 다음 그림의 수직선 위의 점 A, B, C, D 에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때, $(b+d)-(a+c)$ 값을 구하여라. (단, 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1 인 정사각형이다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

(1) 작은 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{5}$

$\therefore\ a=-3-\sqrt{5}$, $c=-3+\sqrt{5}$

(2) 큰 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{10}$

$\therefore\ b=1-\sqrt{10}$, $d=1+\sqrt{10}$

$\therefore\ b+d=1-\sqrt{10}+1+\sqrt{10}=2$

$\therefore\ a+c=-3-\sqrt{5}+(-3+\sqrt{5})=-6$

따라서 $(b+d)-(a+c)=2-(-6)=8$ 이다.

13. $\sqrt{19+x}$ 와 $\sqrt{120x}$ 가 모두 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\sqrt{19+x}$ 가 자연수가 되려면 $19+x=25, 36, 49, \cdots\ \therefore x=6, 17, 30\cdots\ \cdots$ ㉠

$\sqrt{120x}=\sqrt{2^3\times3\times5\times x}$ 가 자연수가 되려면 $\therefore x=2\times3\times5, 2^3\times3\times5, \cdots\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 가장 작은 자연수 x는 30 이다.

14. $\sqrt{4.54} \fallingdotseq 2.131$ 일 때, $\sqrt{x-25} \fallingdotseq -3.69$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 454

해설

$\sqrt{x} \fallingdotseq 25-3.69 = 2.131 \times 10 \fallingdotseq \sqrt{4.54 \times 10^2} = \sqrt{454}$

$\therefore x = 454$

15. $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 $N(x)$ 라고 하면 $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $N(5) = 2$ 이다. 이 때, $N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(10)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$\sqrt{1}=1,\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{9}=3$ 이므로

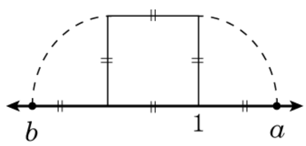
$N(1)=N(2)=N(3)=1$

$N(4)=N(5)=\cdots=N(8)=2$

$N(9)=N(10)=3$

$\therefore N(1)+N(2)+N(3)+\cdots+N(10) = 1\times3+2\times5+3\times2 = 19$

16. 다음 그림의 사각형은 넓이가 2 인 정사각형이다. $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ 의 값은?



[배점 5, 중상]

① $\sqrt{2}-2$ ② $\sqrt{2}-1$ ③ $\sqrt{2}$

④ $2-\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

넓이가 2 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$

$a = 1+\sqrt{2}$, $b = 1-2\sqrt{2}$

$\dfrac{a+b}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$

17. 한 변의 길이가 a 이고 높이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 인 정삼각형과 그 둘레의 길이가 같은 정사각형이 있다면, 이 정사각형의 넓이는 정삼각형 넓이의 몇 배인가 ? [배점 5, 중상]

① 1 배 ② 2 배 ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 배

④ $3\sqrt{3}$ 배 ⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 배

해설

정삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 정사각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{3}{4}a$ 이므로 정사각형의 넓이는 $\dfrac{9}{16}a^2$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \square = \dfrac{9}{16}a^2$

$\therefore\ \square = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (배)

18. 실수 $x,\ k$에 대하여 $\sqrt{(x+k)^2}+\sqrt{(x-k)^2} = 2k$가 k의 값에 관계없이 항상 성립하기 위한 x 값의 범위를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $-k < x < k$

해설

$\sqrt{(x+k)^2}+\sqrt{(x-k)^2}=2k$ 에서
$|x+k|+|x-k|=2k$가 되려면
$x+k>0,\ x-k<0$이다.
$\therefore -k<x<k$

19. $A=\{a,\ b,\ c\}$, $B=\left\{\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{c}\right\}$ 가 있다.
$a<b<c$ 인 자연수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여
$A\cap B=\{a,\ b\}$, $a+c=10$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a+c=10$ 이므로 $a=1,\ c=9$ 라 하면,
$\sqrt{a}=1,\ \sqrt{c}=3$
$A=\{1,\ b,\ 9\}$, $B=\left\{1,\ \sqrt{b},\ 3\right\}$ 에서
$A\cap B=\{a,\ b\}$ 이므로 $b=3$
$\therefore\ a+b=1+3=4$

20. 유리수 a 와 무리수 b 가 $a>0$, $b>0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 5, 상하]

① $b\sqrt{a}$ 는 항상 무리수이다.

② $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ 는 항상 유리수이다.

③ $b-a$ 는 항상 무리수이다.

④ ab 는 항상 무리수이다.

⑤ $b-\sqrt{a}$ 는 유리수일 수도 있고, 무리수일 수도 있다.

해설

$a=2$, $b=\sqrt{2}$ 라 하면
① $b\sqrt{a}=2$ 유리수이지만 $a=1$, $b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수
② $\dfrac{b}{\sqrt{a}}=1$ 유리수이지만 $a=1$, $b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수
③ $b-a=\sqrt{2}-2$ 항상 무리수
④ $ab=2\sqrt{2}$ 항상 무리수
⑤ $b-\sqrt{a}=0$ 유리수이지만 $a=1$, $b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수
따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

21. $5\sqrt{11!}$ 의 정수 부분의 자릿수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5자리

해설

$1\times2\times3\times\cdots\times11=2^8\times3^4\times5^2\times7\times11=(720)^2\times7\times11$
$\therefore\ 5\sqrt{11!}=3600\sqrt{77}$
그런데 $8<\sqrt{77}<9$ 이므로 $28800<3600\sqrt{77}<32400$ 이다.
따라서 정수 부분의 자릿수는 5 자리이다.

22. 정사각형 A, B, C가 있다. A의 넓이는 s 이고, A의 넓이는 B의 2배, B의 넓이는 C의 3배일 때, C의 넓이를 s를 사용한 식으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{s}{6}$

해설

(B의 넓이) $= \frac{1}{2} \times$ (A의 넓이) $= \frac{1}{2}s$
(C의 넓이) $= \frac{1}{3} \times$ (B의 넓이) $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}s = \frac{1}{6}s$
따라서 C의 넓이는 $\frac{s}{6}$ 이다.

23. $a-b>0,\ ab<0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $\sqrt{(b-a)^2} = b-a$

㉡ $\sqrt{(ab)^2} = |ab|$

㉢ $-\sqrt{b^2} > \sqrt{a^2}+1$

㉣ $\sqrt{a^2} - \sqrt{(-b)^2} = a+b$

㉤ $\frac{\sqrt{(ab)^2}}{2} > \frac{\sqrt{(ab)^2}}{3}$

㉥ $\sqrt{(-a)^2}+1 < 1-\sqrt{b^2}$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉤

해설

$b<0<a$ 이므로
㉠ : $\sqrt{(b-a)^2} = a-b$
㉡ : $\sqrt{(ab)^2} = -ab = |ab|$
㉢ : $-\sqrt{b^2} = b,\ \sqrt{a^2} = a$
$b-a<0$ 이므로 $-\sqrt{b^2} < \sqrt{a^2}+1$
㉥ : $\sqrt{(-a)^2} = a$
$-\sqrt{b^2} = -(-b) = b$
$\sqrt{(-a)^2}+1 > 1-\sqrt{b^2}$

24. $\sqrt{5} < x < \sqrt{A}$ 를 만족하는 정수 x의 개수가 2개일 때, 이 식을 성립하게 하는 정수 A 는 모두 몇 개인가? [배점 6, 상중]

① 8 개
② 9 개
③ 10 개
④ 11 개
⑤ 12 개

해설

$\sqrt{5} < x < \sqrt{A}$ 를 만족하는 정수 x 가 2 개가 되려면 $4 < \sqrt{A} \le 5$ 여야 하므로 $16 < A \le 25$
$A = 17,\ 18\ \cdots\ 23,\ 24,\ 25$ 이므로 9 개이다.

25. 서로소인 두 자연수 $m,\ n$ 에 대하여 $\left[10\sqrt{\frac{n}{m}}\right] = 20$, $\sqrt{(m-n)^2} = 100$ 일 때, $m+n$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하여라. (단, $[a]$는 a보다 크지 않은 최대의 정수) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 162

▷ 정답 : 166

해설

$\left[10\sqrt{\frac{n}{m}}\right] = 20$ 에서 $20 \le 10\sqrt{\frac{n}{m}} < 21,\ 2 \le \sqrt{\frac{n}{m}} < 2.1$

$\therefore\ 4 \le \frac{n}{m} < 4.41 \cdots$ ㉠

이때, $\frac{n}{m} > 1$ 이므로 $n > m$

$\sqrt{(m-n)^2} = 100,\ n - m = 100$

$\therefore\ n = m + 100 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $4 \le \frac{m+100}{m} < 4.41$

$4 \le 1 + \frac{100}{m} < 4.41,\ 3 \le \frac{100}{m} < 3.41$

$3m \le 100 < 3.41m$

$3m \le 100$ 에서 $m \le 33.3... \ \cdots$ ㉢

$100 < 3.41m$ 에서 $m > 29.3... \ \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $29.3 \times \times\times < m \le 33.3 \times \times\times$

$\therefore\ m = 30,\ 31,\ 32,\ 33$

이때 각각의 m 에 대한 n 의 값은

$n = 130,\ 131,\ 132,\ 133$ 이다.

그런데 $m,\ n$ 은 서로소이므로

$(m,\ n) = (31,\ 131),\ (33,\ 133)$ 이므로

$m + n = 162,$ 또는 166 이다.