

단원 종합 평가

1. x 의 값이 $x > 0$ 일 때, $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+4)^2}$ 을 간단히 하면? [배점 3, 중하]

- ① 3 ② $2x + 5$ ③ $x + 5$
④ $2x$ ⑤ $x - 3$

해설

$x > 0$ 이므로 $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+4)^2} = (x+1) + (x+4) = 2x + 5$

2. $\sqrt{15} < \sqrt{2x} < \sqrt{250}$ 을 만족하는 x 중에서 $\sqrt{2x}$ 가 자연수가 되도록 하는 x 는 몇 개인지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6 개

해설

$\sqrt{15} < \sqrt{2x} < \sqrt{250} \rightarrow 7.5 < x < 125$
 $\sqrt{2x}$ 가 자연수가 되려면
 $x = 2 \times (\text{제곱수})$ 이어야 한다.
조건에 맞는 x 의 값을 구하면
8, 18, 32, 50, 72, 98 이다.

3. 다음에 주어진 수를 크기가 작은 것부터 차례로 나열할 때, 세 번째에 해당하는 것은? [배점 3, 중하]

- ① $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ② $-\sqrt{5}$ ③ -2
④ $\sqrt{5} + 1$ ⑤ $-2 - \sqrt{5}$

해설

양수는 음수보다 크므로 양수는 양수끼리, 음수는 음수끼리 비교한다.

$$\text{i) } -\sqrt{5} - (-2) = -\sqrt{5} + \sqrt{4} < 0$$

$$\therefore -\sqrt{5} < -2$$

$$\text{ii) } -\sqrt{5} - (-2 - \sqrt{5}) = 2 > 0$$

$$\therefore -\sqrt{5} > -2 - \sqrt{5}$$

$$\text{iii) } \sqrt{5} + \sqrt{2} - (\sqrt{5} + 1) = \sqrt{2} - 1 > 0$$

$$\therefore \sqrt{5} + \sqrt{2} > \sqrt{5} + 1$$

따라서 주어진 수의 순서는

$$-2 - \sqrt{5} < -\sqrt{5} < -2 < \sqrt{5} + 1 < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

4. $a = \sqrt{32} - \frac{12}{\sqrt{8}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{6}}$
일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

$$a = 4\sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{3}\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{6\sqrt{2}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{2} \div \frac{\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = 6$$

5. $3\sqrt{3}$ 의 소수 부분을 a , 정수 부분을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? [배점 3, 중하]

- ① $\sqrt{3} - 5$ ② $3\sqrt{3} - 5$ ③ $\sqrt{3} - 9$
④ $3\sqrt{3} - 9$ ⑤ $3\sqrt{3} - 10$

해설

$3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, $5 < \sqrt{27} < 6$ 이므로
 $3\sqrt{3}$ 의 정수 부분 $b = 5$
 소수 부분 $a = 3\sqrt{3} - 5$
 $\therefore a - b = (3\sqrt{3} - 5) - 5 = 3\sqrt{3} - 10$

6. $\sqrt{\frac{x}{3}}$ 가 정수가 되게 하는 x 의 값 중 두 자리 정수는 모두 몇 개인가? [배점 4, 중중]

- ① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개
 ④ 7 개 ⑤ 3 개

해설

$10 \leq x \leq 99$, $x = 3k^2$ (k : 정수) 이므로 $x = 3 \times 2^2, 3 \times 3^2, 3 \times 4^2, 3 \times 5^2$
 $x = 12, 27, 48, 75$
 $\therefore$ 4개

7. $-1 < a < 2$ 일 때, $\sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-2)^2} + a - 3$ 을 간단히 하면? [배점 4, 중중]

- ① a ② $3a - 4$ ③ 0
 ④ $a - 6$ ⑤ $3a + 1$

해설

$-1 < a < 2$ 에서 $a + 1 > 0$, $a - 2 < 0$ 이므로
 (준식) $= a + 1 - (a - 2) + a - 3 = a$

8. $A = 5\sqrt{2} - 2$, $B = 3\sqrt{2} + 1$, $C = 4\sqrt{3} - 2$ 일 때, 다음 중 대소 관계가 옳은 것은? [배점 4, 중중]

- ① $A > B > C$ ② $A > C > B$
 ③ $B > A > C$ ④ $B > C > A$
 ⑤ $C > A > B$

해설

$A - B = 2\sqrt{2} - 3 < 0$ 이므로 $A < B$
 $A - C = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} > 0$ 이므로 $A > C$
 $\therefore B > A > C$

9. $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{a} = 3 \times \sqrt{6}$ 를 만족하는 양의 유리수 a 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

해설

좌변 $= \sqrt{4 \times 3 \times a}$, 우변 $= \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{54}$,
 $4 \times 3 \times a = 54$
 $\therefore a = \frac{9}{2}$

10. 다음 중 $\sqrt{60}$ 의 근삿값과 숫자 배열이 같은 것을 모두 고르면? [배점 4, 중중]

- ① $\sqrt{0.6}$ ② $\sqrt{600}$ ③ $\sqrt{6000}$
 ④ $\sqrt{60000}$ ⑤ $\sqrt{0.0006}$

해설

$\sqrt{60}$ 이 들어가는 형태로 표현할 수 있으면 $\sqrt{60}$ 과 숫자 배열이 같은 수이다.

$$\sqrt{0.6} = \sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{60}}{10}$$

$$\sqrt{600} = 10\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6000} = 10\sqrt{60}$$

$$\sqrt{60000} = 100\sqrt{6}$$

$$\sqrt{0.0006} = \sqrt{\frac{6}{10000}} = \frac{\sqrt{6}}{100}$$

②, ④, ⑤는 $\sqrt{6}$ 과 숫자 배열이 같은 수

11. $5x + y = 15$ 일 때, $\sqrt{2x + y}$ 가 자연수가 되게 만드는 가장 작은 자연수 x 는? [배점 5, 중상]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$5x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 5x$$

$$\sqrt{2x + y} = \sqrt{2x + 15 - 5x} = \sqrt{15 - 3x}$$

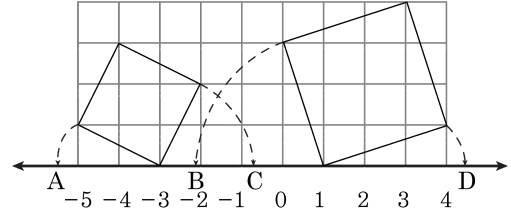
x 가 가장 작은 자연수가 되려면 근호 안의 수는 15 미만의 가장 큰 제곱수가 되어야 하므로 9가 되어야 한다.

$$\sqrt{15 - 3x} = \sqrt{9}$$

$$15 - 3x = 9$$

$$\therefore x = 2$$

12. 다음 그림의 수직선 위의 점 A, B, C, D 에 대응하는 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때, $(b + d) - (a + c)$ 값을 구하여라. (단, 모눈 한 칸은 한 변의 길이가 1 인 정사각형이다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

(1) 작은 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{5}$

$$\therefore a = -3 - \sqrt{5}, c = -3 + \sqrt{5}$$

(2) 큰 정사각형 한 변의 길이 : $\sqrt{10}$

$$\therefore b = 1 - \sqrt{10}, d = 1 + \sqrt{10}$$

$$\therefore b + d = 1 - \sqrt{10} + 1 + \sqrt{10} = 2$$

$$\therefore a + c = -3 - \sqrt{5} + (-3 + \sqrt{5}) = -6$$

따라서 $(b + d) - (a + c) = 2 - (-6) = 8$ 이다.

13. $\sqrt{19 + x}$ 와 $\sqrt{120x}$ 가 모두 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\sqrt{19 + x}$ 가 자연수가 되려면 $19 + x = 25, 36, 49, \dots \therefore x = 6, 17, 30, \dots \dots \textcircled{1}$

$\sqrt{120x} = \sqrt{2^3 \times 3 \times 5 \times x}$ 가 자연수가 되려면 $\therefore x = 2 \times 3 \times 5, 2^3 \times 3 \times 5, \dots \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 가장 작은 자연수 x 는 30 이다.

14. $\sqrt{4.54} \approx 2.131$ 일 때, $\sqrt{x} - 25 \approx -3.69$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 454

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &\approx 25 - 3.69 = 2.131 \times 10 \approx \sqrt{4.54 \times 10^2} = \sqrt{454} \\ \therefore x &= 454\end{aligned}$$

15. $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 $N(x)$ 라고 하면 $2 < \sqrt{5} < 3$ 이므로 $N(5) = 2$ 이다. 이 때, $N(1) + N(2) + N(3) + \dots + N(10)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

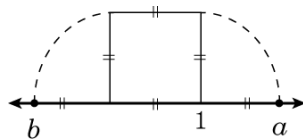
▶ 답:

▶ 정답: 19

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{1} &= 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3 \text{ 이므로} \\ N(1) &= N(2) = N(3) = 1 \\ N(4) &= N(5) = \dots = N(8) = 2 \\ N(9) &= N(10) = 3 \\ \therefore N(1) + N(2) + N(3) + \dots + N(10) &= 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 2 = 19\end{aligned}$$

16. 다음 그림의 사각형은 넓이가 2 인 정사각형이다. $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ 의 값은?



[배점 5, 중상]

- ① $\sqrt{2} - 2$ ② $\sqrt{2} - 1$ ③ $\sqrt{2}$
④ $2 - \sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

넓이가 2 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}$

$$a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2}) = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

17. 한 변의 길이가 a 이고 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 인 정삼각형과 그 둘레의 길이가 같은 정사각형이 있다면, 이 정사각형의 넓이는 정삼각형 넓이의 몇 배인가?

[배점 5, 중상]

- ① 1 배 ② 2 배 ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 배
④ $3\sqrt{3}$ 배 ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 배

해설

$$\begin{aligned}\text{정삼각형의 넓이는 } &\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, \text{ 정사각형의 한 변의 길이는 } \frac{3}{4}a \text{ 이므로 정사각형의 넓이는 } \frac{9}{16}a^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \square &= \frac{9}{16}a^2 \\ \therefore \square &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (배)}\end{aligned}$$

18. 실수 x, k 에 대하여 $\sqrt{(x+k)^2} + \sqrt{(x-k)^2} = 2k$ 가 k 의 값에 관계없이 항상 성립하기 위한 x 값의 범위를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: $-k < x < k$

해설

$\sqrt{(x+k)^2} + \sqrt{(x-k)^2} = 2k$ 에서
 $|x+k| + |x-k| = 2k$ 가 되려면
 $x+k > 0, x-k < 0$ 이다.
 $\therefore -k < x < k$

19. $A = \{a, b, c\}, B = \{\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\}$ 가 있다.
 $a < b < c$ 인 자연수 a, b, c 에 대하여
 $A \cap B = \{a, b\}, a+c=10$ 일 때, $a+b$ 의 값을
 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

$a+c=10$ 이므로 $a=1, c=9$ 라 하면,
 $\sqrt{a}=1, \sqrt{c}=3$
 $A = \{1, b, 9\}, B = \{1, \sqrt{b}, 3\}$ 에서
 $A \cap B = \{a, b\}$ 이므로 $b=3$
 $\therefore a+b=1+3=4$

20. 유리수 a 와 무리수 b 가 $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 중
 옳은 것을 모두 고르면? [배점 5, 상하]

① $b\sqrt{a}$ 는 항상 무리수이다.

② $\frac{b}{\sqrt{a}}$ 는 항상 유리수이다.

③ $b-a$ 는 항상 무리수이다.

④ ab 는 항상 무리수이다.

⑤ $b-\sqrt{a}$ 는 유리수일 수도 있고, 무리수일 수도 있다.

해설

$a=2, b=\sqrt{2}$ 라 하면

① $b\sqrt{a}=2$ 유리수이지만 $a=1, b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수

② $\frac{b}{\sqrt{a}}=1$ 유리수이지만 $a=1, b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수

③ $b-a=\sqrt{2}-2$ 항상 무리수

④ $ab=2\sqrt{2}$ 항상 무리수

⑤ $b-\sqrt{a}=0$ 유리수이지만 $a=1, b=\sqrt{3}$ 일 때는 무리수

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

21. $5\sqrt{11!}$ 의 정수 부분의 자릿수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 5자리

해설

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 11 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11 =$
 $(720)^2 \times 7 \times 11$

$\therefore 5\sqrt{11!} = 3600\sqrt{77}$

그런데 $8 < \sqrt{77} < 9$ 이므로 $28800 < 3600\sqrt{77} < 32400$ 이다.

따라서 정수 부분의 자릿수는 5 자리이다.

22. 정사각형 A, B, C가 있다. A의 넓이는 s 이고, A의 넓이는 B의 2배, B의 넓이는 C의 3배일 때, C의 넓이를 s 를 사용한 식으로 나타내어라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{s}{6}$

해설

$$\begin{aligned}(B \text{의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times (A \text{의 넓이}) = \frac{1}{2}s \\ (C \text{의 넓이}) &= \frac{1}{3} \times (B \text{의 넓이}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}s = \frac{1}{6}s \\ \text{따라서 } C \text{의 넓이는 } \frac{s}{6} \text{이다.}\end{aligned}$$

23. $a - b > 0$, $ab < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠ $\sqrt{(b-a)^2} = b-a$
- ㉡ $\sqrt{(ab)^2} = |ab|$
- ㉢ $-\sqrt{b^2} > \sqrt{a^2} + 1$
- ㉣ $\sqrt{a^2} - \sqrt{(-b)^2} = a+b$
- ㉤ $\frac{\sqrt{(ab)^2}}{2} > \frac{\sqrt{(ab)^2}}{3}$
- ㉥ $\sqrt{(-a)^2} + 1 < 1 - \sqrt{b^2}$

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

▷ 정답: ㉢

▷ 정답: ㉤

해설

$$\begin{aligned}b < 0 < a \text{ 이므로} \\ \text{㉠ : } \sqrt{(b-a)^2} &= a-b \\ \text{㉡ : } \sqrt{(ab)^2} &= -ab = |ab| \\ \text{㉢ : } -\sqrt{b^2} &= b, \sqrt{a^2} = a \\ b-a < 0 \text{ 이므로 } -\sqrt{b^2} &< \sqrt{a^2} + 1 \\ \text{㉣ : } \sqrt{(-a)^2} &= a \\ -\sqrt{b^2} &= -(-b) = b \\ \sqrt{(-a)^2} + 1 &> 1 - \sqrt{b^2}\end{aligned}$$

24. $\sqrt{5} < x < \sqrt{A}$ 를 만족하는 정수 x 의 개수가 2개일 때, 이 식을 성립하게 하는 정수 A 는 모두 몇 개인가? [배점 6, 상중]

- ① 8 개 ② 9 개 ③ 10 개
- ④ 11 개 ⑤ 12 개

해설

$\sqrt{5} < x < \sqrt{A}$ 를 만족하는 정수 x 가 2개가 되려면 $4 < \sqrt{A} \leq 5$ 여야 하므로 $16 < A \leq 25$
 $A = 17, 18 \dots 23, 24, 25$ 이므로 9 개이다.

25. 서로소인 두 자연수 m, n 에 대하여 $\left[10\sqrt{\frac{n}{m}}\right] = 20$, $\sqrt{(m-n)^2} = 100$ 일 때, $m+n$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 구하여라. (단, $[a]$ 는 a 보다 크지 않은 최대의 정수) [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 162

▷ 정답: 166

해설

$$\left[10\sqrt{\frac{n}{m}} \right] = 20 \text{ 에서 } 20 \leq 10\sqrt{\frac{n}{m}} < 21, 2 \leq$$

$$\sqrt{\frac{n}{m}} < 2.1$$

$$\therefore 4 \leq \frac{n}{m} < 4.41 \dots \textcircled{㉠}$$

이때, $\frac{n}{m} > 1$ 이므로 $n > m$

$$\sqrt{(m-n)^2} = 100, n - m = 100$$

$$\therefore n = m + 100 \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 4 \leq \frac{m+100}{m} < 4.41$$

$$4 \leq 1 + \frac{100}{m} < 4.41, 3 \leq \frac{100}{m} < 3.41$$

$$3m \leq 100 < 3.41m$$

$$3m \leq 100 \text{ 에서 } m \leq 33.3\dots \dots \textcircled{㉢}$$

$$100 < 3.41m \text{ 에서 } m > 29.3\dots \dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{에서 } 29.3 \times \times \times < m \leq 33.3 \times \times \times$$

$$\therefore m = 30, 31, 32, 33$$

이때 각각의 m 에 대한 n 의 값은

$$n = 130, 131, 132, 133 \text{ 이다.}$$

그런데 m, n 은 서로소이므로

$$(m, n) = (31, 131), (33, 133) \text{ 이므로}$$

$$m + n = 162, \text{ 또는 } 166 \text{ 이다.}$$