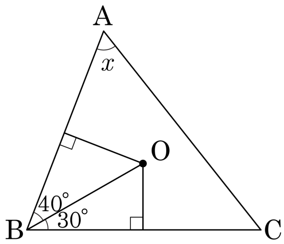
단원 형성 평가

1. 다음 그림에서 점 O 가 $\triangle ABC$ 의 외심일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



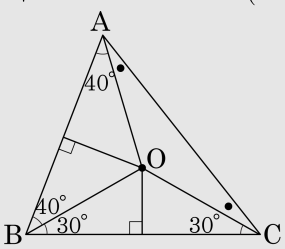
[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 60 °

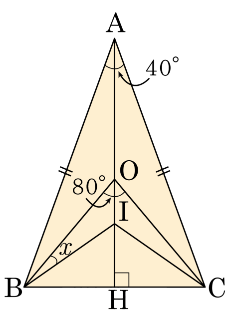
해설

다음 그림과 같이 $\angle BCO = 30°$,$\angle OAB = 40°$ 이고 $\angle OCA = 90° - (40° + 30°) = 20°$



따라서 $\angle x = 40° + 20° = 60°$

2. 다음 그림은 이등변삼각형 ABC 이다. 점 O 는 외심, 점 I 는 내심이고, $\angle A = 40°$, $\angle O = 80°$ 일 때, $\angle IBO$ 의 크기를 구하여라.



[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 °

해설

$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = 110°$
$\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로 $\triangle OBC$ 는 이등변 삼각형이다.
$\angle OBC = 50°$
또한 이등변삼각형의 외심과 내심은 꼭지각의 이등분선 위에 있으므로 $\angle IBC = 35°$ 이다.
$\therefore\ \angle OBI = \angle OBC - \angle IBC = 50° - 35° = 15°$

3. 다음은 삼각형 모양의 종이를 오려서 최대한 큰 원을 만드는 과정이다. 빈 줄에 들어갈 것으로 옳은 것은?

1. 세 내각의 이등분선을 긋는다.
2. 세 내각의 이등분선의 교점을 I 라고 한다.
3. ____________________
4. 그린 원을 오린다.

[배점 2, 하중]

① 점 I 에서 한 변까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.

② 점 I 에서 꼭짓점까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다

③ 세 변의 수직이등분선의 교점을 O 라고 한다.

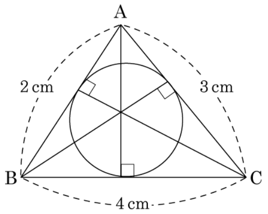
④ 점 O 에서 한 변까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.

⑤ 점 O 에서 꼭짓점까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.

해설

1. 세 내각의 이등분선을 긋는다.
2. 세 내각의 이등분선의 교점을 I 라고 한다.
3. 점 I 에서 한 변까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.
4. 그린 원을 오린다.

4. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$ 의 넓이가 12cm^2 일 때, 내접원의 반지름의 길이를 구하여라.



[배점 2, 하중]

▶ 답 :

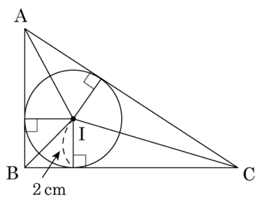
▷ 정답 : $\frac{8}{3}$ cm

해설

내접원의 중심을 I라고 하면, $\triangle ABI$, $\triangle IBC$, $\triangle ICA$ 의 높이는 내접원의 반지름과 같다. 내접원의 반지름을 x 라 하면 $\frac{1}{2}(2+4+3)x = 12\text{cm}^2$

$\therefore\ x = \frac{8}{3}\text{cm}$

5. 다음 그림에서 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이고, 내접원의 반지름의 길이는 2cm 이다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 24cm^2 일 때, $\triangle ABC$ 의 세변의 길이의 합을 구하여라.



[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24 cm

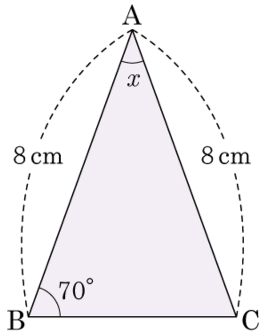
해설

$\triangle ABI$, $\triangle BCI$, $\triangle ICA$ 의 높이는 같으므로,

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) \times 2 = 24$

$\therefore\ \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 24\text{cm}$

6. 다음과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 8\text{cm}$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



[배점 3, 하상]

① $40°$ ② $45°$ ③ $50°$

④ $55°$ ⑤ $60°$

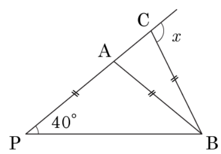
해설

$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle ACB = 70°$

따라서 $x = 180° - 2 \times 70° = 40°$

7. 다음 그림에서 $\angle P = 40°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는? (단, $\overline{AP} = \overline{AB} = \overline{BC}$)



[배점 3, 하상]

① $90°$ ② $95°$ ③ $100°$

④ $105°$ ⑤ $110°$

해설

$\triangle APB$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle P = \angle ABP = 40°$

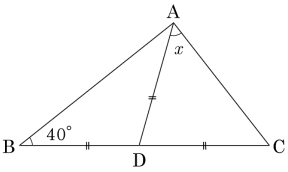
$\angle BAC = 40° + 40° = 80°$

$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle BAC = \angle BCA = 80°$

$\therefore \angle x = 180° - 80° = 100°$

8. 다음 그림에서 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ 이고 $B = 40°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



[배점 3, 하상]

① 40° ② 45° ③ 50°

④ 55° ⑤ 60°

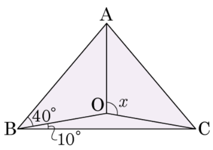
해설

$\angle B = \angle BAD = 40°$ 이므로

$\angle ADC = 40° + 40° = 80°$

$\therefore \angle x = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$

9. 다음 그림에서 점 O가 삼각형 ABC의 외심일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



[배점 3, 하상]

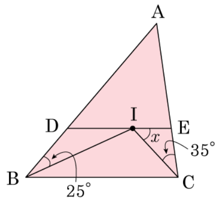
▶ 답 :

▷ 정답 : 100 °

해설

$\angle x = 50° \times 2 = 100°$

10. 다음 그림에서 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이고, $\overline{DE} // \overline{BC}$ 일 때, x 의 값을 구하여라.



[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 35 °

해설

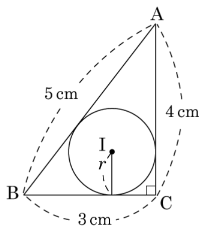
점 I 가 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로

$\angle IBC = \angle DBI = 25°$, $\angle ICB = \angle ECI = 35°$

$\overline{DE} // \overline{BC}$ 이므로 $\angle IBC = \angle DIB = 25°$, $\angle ICB = \angle EIC = 35°$ 이다.

따라서 $\angle x = \angle EIC = 35°$ 이다.

11. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 5\text{cm}$, $\overline{AC} = 4\text{cm}$, $\overline{BC} = 3\text{cm}$ 이고, $\angle C = 90°$ 일 때, 내접원 I 의 반지름의 길이는?



[배점 3, 하상]

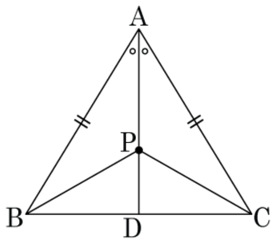
① 1cm ② 2cm ③ 3cm

④ 4cm ⑤ 5cm

해설

내접원의 반지름의 길이를 r이라 하면
$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times r \times (3+4+5) = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ 이다.
따라서 $r = 1\text{cm}$ 이다.

12. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 $\overline{BC}$와의 교점을 D라 하자. $\overline{AD}$ 위의 한점 P에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



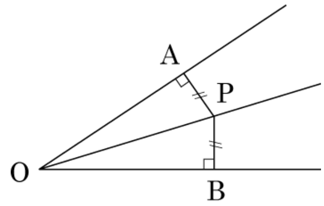
[배점 3, 중하]

① $\overline{BD} = \overline{CD}$
② $\overline{BP} = \overline{BD}$
③ $\angle ADB = 90°$
④ $\overline{BP} = \overline{CP}$
⑤ $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$

해설

①,③ 이등변삼각형에서 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로 $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\angle ADB = 90°$ 이다.
④,⑤ $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAP = \angle CAP$(가정), $\overline{AP}$(공통) 이므로 합동조건 (SAS합동) 에 의하여 $\triangle ABP \equiv \triangle ACP$ 이다.

13. 다음 그림에서



$\angle PAO = \angle PBO = 90°$ 이고 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 일 때, 다음 중 보기에서 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $\overline{AO} = \overline{BO}$
㉡ $\angle APO = \angle BPO$
㉢ $\angle AOB = \angle APB$
㉣ $\triangle AOP \equiv \triangle BOP$
㉤ $\angle AOP = \angle BOP$
㉥ $\overline{OA} = \overline{OP}$

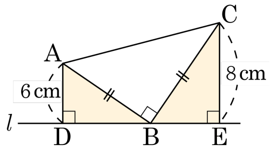
[배점 3, 중하]

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : ㉠
▷ 정답 : ㉡
▷ 정답 : ㉣
▷ 정답 : ㉤

해설

$\triangle AOP \equiv \triangle BOP$ (RHS 합동) 이다.
㉢ $\angle AOB \neq \angle APB$
㉥ $\overline{OA} \neq \overline{OP}$

14. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 두 꼭짓점 A, C 에서 꼭짓점 B 를 지나는 직선에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 하자. $\overline{AD} = 6\text{cm}$, $\overline{CE} = 8\text{cm}$ 일 때, 어두운 부분의 넓이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $48\,\text{cm}^2$

해설

직각삼각형 ABD 와 BCE 는 빗변의 길이가 같고, $\angle ABD = \angle BCE$ ($\because$ $\angle ABD + 90° + \angle CBE = 180°$, $\angle BCE + \angle CBE + 90° = 180°$)

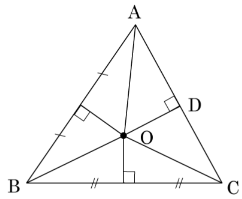
이므로 직각삼각형 ABD 와 BCE 는 RHA 합동이다.

$\overline{AD} = \overline{BE}$, $\overline{DB} = \overline{CE}$

삼각형의 넓이는 같으므로 직각삼각형 넓이의 2 배를 하면 된다.

$2\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 6\right) = 48(\text{cm}^2)$

15. 다음은「삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.」를 증명하는 과정이다. □ 안에 들어갈 알맞은 것은?



위 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선의 교점을 O 라 하고,
점 O 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 D 라 하자.
점 O 는 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선 위에 있으므로
$\overline{OA} = \overline{OB}$ ······㉠
또, 점 O 는 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선 위에 있으므로
$\overline{OB} = \overline{OC}$ ······㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{OA} = \square$
$\triangle AOD$ 와 $\triangle COD$ 에서 $\angle ADO = \angle CDO = 90°$
$\overline{OA} = \square$
$\overline{OD}$ 는 공통
$\therefore \triangle AOD \equiv \triangle COD$ (RHS 합동)
따라서, $\overline{AD} = \overline{CD}$ 이므로 $\overline{OD}$ 는 $\overline{AC}$ 의 수직이등분선이 된다.
즉, $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점 O 에서 만난다.

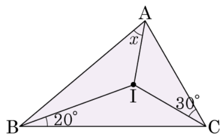
[배점 3, 중하]

① $\overline{OC}$ ② $\overline{OD}$ ③ $\overline{OA}$
④ $\overline{AD}$ ⑤ $\overline{CD}$

해설

$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 이다.

16. 다음 그림에서 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이다, $\angle IBC = 20°$ $\angle ICA = 30°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 40 °

해설

$\angle x + \angle IBC + \angle ICA = 90°$

$\therefore \angle x = 90° - (20° + 30°) = 40°$

17. 세 변의 길이가 각각 10 cm, 24 cm, 26 cm 인 직각삼각형의 외접원과 내접원의 넓이의 합을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $185\,\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

외접원의 반지름 : $\dfrac{26}{2} = 13(\mathrm{cm})$

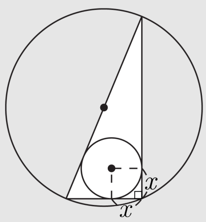
넓이 :$13 \times 13 \times \pi = 169\pi(\mathrm{cm}^2)$

내접원의 반지름의 길이를 x 라 하면

$10 - x + 24 - x = 26$

$34 - 2x = 26, \quad -2x = -8$

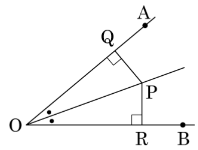
$\therefore x = 4$



넓이 : $4 \times 4 \times \pi = 16\pi(\mathrm{cm}^2)$

$\therefore 169\pi + 16\pi = 185\pi(\mathrm{cm}^2)$

18. 다음 그림은「한 점 P 에서 두 변 OA, OB 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 할 때, $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이면 $\overline{OP}$ 는 $\angle AOB$ 의 이등분선이다.」를 증명하기 위해 그린 것이다. 다음 중 필요한 조건이 아닌 것은?



[배점 4, 중중]

① $\overline{PQ} = \overline{PR}$
② $\overline{OP}$ 는 공통
③ $\angle PQO = \angle PRO$
④ $\angle QOP = \angle ROP$
⑤ $\triangle POQ \equiv \triangle POR$

해설

④는 증명해야 할 대상이므로 조건이 아니다.

$\triangle QPO$ 와 $\triangle RPO$ 에서

i) $\overline{OP}$ 는 공통 (②)

ii) $\overline{PQ} = \overline{PR}$ (가정) (①)

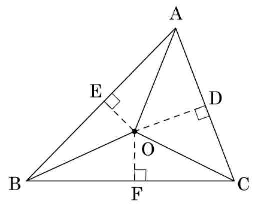
iii) $\angle PQO = \angle PRO = 90°$ (가정) (③)

i), ii), iii) 에 의해 $\triangle QPO \equiv \triangle RPO$ (RHS 합동) (⑤) 이다.

합동인 도형의 대응각은 같으므로

$\angle QOP = \angle ROP$ 이므로 $\overline{OP}$ 는 $\angle AOB$ 의 이등분선이다.

19. 점 O 가 $\triangle ABC$ 의 외심일 때, 합동인 삼각형이 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면?



[배점 4, 중중]

① $\triangle OBE \equiv \triangle OBF$ ② $\triangle OCF \equiv \triangle OCD$

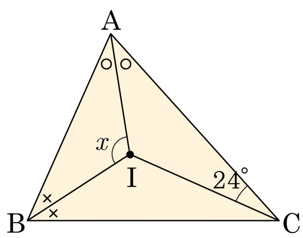
③ $\triangle OBE \equiv \triangle OAE$ ④ $\triangle OAD \equiv \triangle OCD$

⑤ $\triangle OBF \equiv \triangle OCF$

해설

$\triangle AEO \equiv \triangle BEO$, $\triangle OBF \equiv \triangle OCF$, $\triangle ADO \equiv \triangle CDO$ 이다.

20. 다음 그림에서 점 I는 $\angle A$와 $\angle B$의 내각의 이등분선의 교점이다. $\angle ICA = 24°$일 때, $\angle x$의 값을 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $114°$

해설

점 I가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\angle ICA = \angle ICB = 24°$

$\triangle ABC$의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$2 \times {+2} \bullet {+2} \times 24° = 180°$

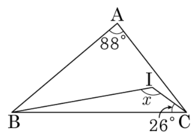
$\therefore \times + \bullet = 66°$

$\triangle IAB$의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로

$\angle x + \times + \bullet = 180°$

$\therefore\ \angle x = 114°$

21. 다음 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$의 내심이다. $\angle A = 88°$ 일 때, $\angle BIC$의 크기는?



[배점 4, 중중]

① $44°$ ② $67°$ ③ $84°$

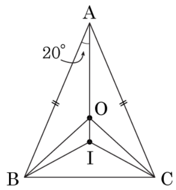
④ $134°$ ⑤ $176°$

해설

점 I가 $\triangle ABC$의 내심일 때, $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ 이다.

$\therefore\ \angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A = 90° + \frac{1}{2} \times 88° = 134°$

22. 다음 그림과 같은 이등변삼각형 ABC 에서 점 I 와 점 O 는 각각 $\triangle ABC$ 의 내심과 외심이다. $\angle BAO = 20°$ 일 때, $\angle BIC - \angle BOC$ 의 크기는?



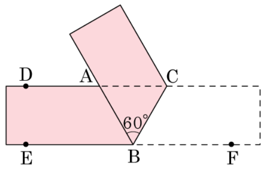
[배점 4, 중중]

① 30° ② 40° ③ 50°
④ 60° ⑤ 70°

해설

$\triangle ABC$ 의 외심이 점 O 일 때, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$,$\angle A = 40°$ 이므로
$\angle ABC = 70°$, $\angle BOC = 80°$ 이다.
$\triangle ABC$ 의 내심이 점 I 일 때, $\frac{1}{2}\angle A + 90° = \angle BIC$ 이므로
$\angle BIC = \frac{1}{2} \times 40° + 90° = 110°$ 이다.
따라서 $\angle BIC - \angle BOC = 110° - 80° = 30°$ 이다.

23. 다음 그림과 같이 폭이 일정한 종이 테이프를 접었다. $\angle ABC = 60°$일 때, 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?



[배점 5, 중상]

① $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

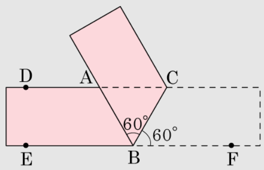
② $\overline{BC} = \overline{AB}$ 인 이등변삼각형이다.

③ $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

④ $\angle ABE = \angle CBF$ 이다.

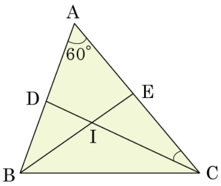
⑤ $\angle DAB = 100°$ 이다.

해설



① $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이다. → $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$인 정삼각형이다.
② $\overline{BC} = \overline{AB}$인 이등변삼각형이다. → $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$인 정삼각형이다.
③ $\angle ABC = \angle CBF = 60°$ (종이 접은 각)
$\angle CBF = \angle ACB = 60°$ (엇각) $\therefore \angle CAB = 60°$
$\triangle ABC$는 내각이 모두 $60°$인 정삼각형이다.
④ $\angle ABE = 180° - \angle ABC - \angle CBF = 180° - 60° - 60° = 60°$이다.
$\therefore \angle ABE = \angle CBF$
⑤ $\angle DAB = 100°$이다. → $\angle CAB = 60°$ $\therefore \angle DAB = 120°$

24. 다음 그림에서 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. $\angle A = 60°$ 일 때, $\angle BDC + \angle BEC$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5, 중상]

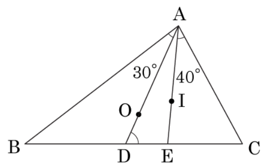
▶ 답 :

▷ 정답 : $180°$

해설

$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC = 120°$, $\angle DIE = 120°$.
$\square ADIE$ 에서 $\angle ADI + \angle AEI + 60° + 120° = 360°$
$\angle ADI + \angle AEI = 180°$.
$\angle BDI + \angle ADI + \angle CEI + \angle AEI = 360°$, $\angle BDC + \angle BEC = 180°$.

25. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 점 O 와 I 는 각각 삼각형의 외심과 내심이다. $\angle BAD = 30°$, $\angle CAE = 40°$ 일 때, $\angle ADE = (\ \ )°$ 이다. ( ) 안에 알맞은 수를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$\angle BAE = \angle CAE$ 이므로 $\angle DAE = 10°$,$\angle OBA = \angle OAB = 30°$
$\angle OBC + \angle OBA + \angle OAC = 90°$ 이므로 $\angle OBC = 10°$
$\therefore \angle ADE = \angle ABD + \angle BAD = 70°$