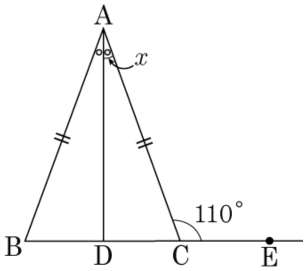
단원 형성 평가

1. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ACE = 110°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



[배점 2, 하중]

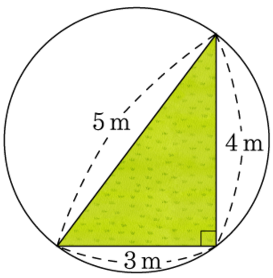
▶ 답 :

▷ 정답 : $20°$

해설

이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로 $\angle ADC = 90°$
$\triangle ADC$에서 두 내각의 합과 이웃하지 않는 한 외각의 크기는 같으므로 $\angle x + 90° = 110°$이다.
따라서 $\angle x = 20°$이다.

2. 민호는 그림과 같이 직각삼각형 모양의 잔디 밭에 원 모양의 테두리를 두르려고 한다. 테두리를 둘렀을 때, 원의 넓이를 구하여라.



[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $6.25\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

직각삼각형이므로 빗변의 중심에 외심이 있다. 그러므로 원의 반지름은 $2.5\,\mathrm{cm}$ 이다.
따라서 원의 넓이는 $\pi(2.5\,\mathrm{cm})^2 = 6.25\pi(\,\mathrm{cm}^2)$ 이다.

3. 다음은 삼각형 모양의 종이를 오려서 최대한 큰 원을 만드는 과정이다. 빈 줄에 들어갈 것으로 옳은 것은?

1. 세 내각의 이등분선을 긋는다.
2. 세 내각의 이등분선의 교점을 I 라고 한다.
3. ________________
4. 그린 원을 오린다.

[배점 2, 하중]

① 점 I 에서 한 변까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.

② 점 I 에서 꼭짓점까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다

③ 세 변의 수직이등분선의 교점을 O 라고 한다.

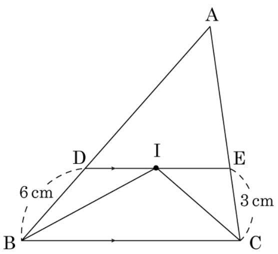
④ 점 O 에서 한 변까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.

⑤ 점 O 에서 꼭짓점까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.

해설

1. 세 내각의 이등분선을 긋는다.
2. 세 내각의 이등분선의 교점을 I 라고 한다.
3. 점 I 에서 한 변까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그린다.
4. 그린 원을 오린다.

4. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내심 I 를 지나고 $\overline{BC}$ 에 평행한 직선과 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 와의 교점을 각각 D, E 라고 한다.
$\overline{BD} = 6\,\text{cm}$, $\overline{CE} = 3\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{DE}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 2, 하중]

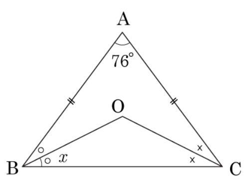
▶ 답 :

▷ 정답 : $9\,\text{cm}$

해설

$\overline{BD} = \overline{DI}$, $\overline{CE} = \overline{IE}$
$\overline{DE} = \overline{DI} + \overline{IE} = 6 + 3 = 9(\,\text{cm})$

5. $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC 에서 $\angle BAC = 76°$ 일 때, x 의 값은?



[배점 3, 하상]

① $20\,°$　② $22\,°$　③ $24\,°$
④ $26\,°$　⑤ $28\,°$

해설

$\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이므로 $\angle ABC = \angle ACB$
그런데 $\angle ABC$ 와 $\angle ACB$ 를 이등분한 선이 만나는 점이 O 이므로 $\angle ABO = \angle OBC = \angle OCB = \angle ACO$
따라서 $4 \times x = 180° - 76° = 104°$
$\therefore x = 26\,°$

6. 다음은 $\angle XOY$ 의 이등분선 위의 한 점을 P 라 하고 점P 에서 $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ 에 내린 수선의 발을 각각A, B 라고 할 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 임을 증명하는 과정이다. ㉠~㉤에 들어갈 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

[가정]$\angle AOP = ($ ㉠ $)$,
$\angle PAO = \angle PBO = 90°$
[결론] (㉡)= (㉢)
[증명]$\triangle POA$ 와 $\triangle POB$ 에서
$\angle AOP = ($ ㉠ $) \cdots$ ⓐ
(㉣)는 공통 ⋯ ⓑ
$\angle PAO = \angle PBO = 90° \cdots$ ⓒ
ⓐ, ⓑ, ⓒ에 의해서 $\triangle POA \equiv \triangle POB$ ((㉤) 합동)
(㉡)= (㉢)

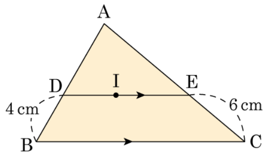
[배점 3, 하상]

① ㉠$\angle BOP$　② ㉡$\overline{PA}$　③ ㉢$\overline{PB}$
④ ㉣$\overline{OP}$　⑤ ㉤SAS

해설

$\triangle POA \equiv \triangle POB$ 는 $\angle AOP = \angle BOP$, $\overline{OP}$ 는 공통, $\angle PAO = \angle PBO = 90°$ 이므로 RHA 합동이다.

7. 다음 그림에서 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이고, $\overline{BC}$ 와 평행한 직선과 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 의 교점을 각각 D , E 라고 한다. $\overline{BD} = 4\text{cm}$, $\overline{CE} = 6\text{cm}$ 일 때, $\overline{DE}$ 의 길이는?



[배점 3, 하상]

① 8cm ② 9cm ③ 10cm

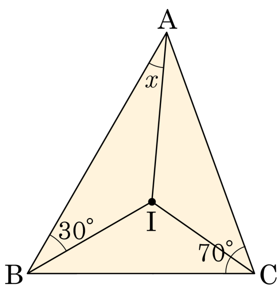
④ 11cm ⑤ 12cm

해설

점 I 가 내심이고, $\overline{DE} // \overline{BC}$ 일 때, $\overline{DE} = \overline{DI} + \overline{EI} = \overline{DB} + \overline{EC}$ 이므로

$\overline{DE} = 4 + 6 = 10(\text{cm})$ 이다.

8. 다음 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. $\angle IBA = 30°$, $\angle C = 70°$ 일 때, $\angle IAB$ 의 크기는?



[배점 3, 하상]

① 20° ② 25° ③ 30°

④ 35° ⑤ 40°

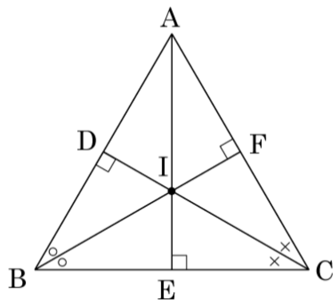
해설

$\angle B = 2 \times 30° = 60°$

$\angle A = 180° - (60° + 70°) = 50°$

$\therefore \ \angle IAB = \dfrac{1}{2} \times 50° = 25°$

9. 다음은 삼각형의 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만남을 증명한 것이다. 빈칸에 공통으로 들어갈 알맞은 것을 고르면?



[증명] $\triangle IBE$ 와 $\triangle IBD$ 에서

$\angle IEB = \angle IDB = 90°$,

$\overline{IB}$ 는 공통변,

$\angle IBE = \angle IBD$ 이므로

$\triangle IBE \equiv \triangle IBD$ (RHA 합동)

$\therefore \overline{ID} = \boxed{} \cdots$ ㉠

같은 방법으로 $\triangle ICE \equiv \triangle ICF$ (RHA 합동) 이므로

$\therefore \boxed{} = \overline{IF} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서

$\therefore \ \overline{ID} = \overline{IF}$

$\triangle ADI$ 와 $\triangle AFI$ 에서

$\angle ADI = \angle AFI = 90°$, $\overline{AI}$ 는 공통 변, $\overline{ID} = \overline{IF}$ 이므로 $\triangle ADI \equiv \triangle AFI$(RHS 합동)

대응각 $\angle DAI = \angle FAI$ 이므로 $\overline{AI}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이다.

따라서 세 각의 이등분선은 한 점에서 만난다.

[배점 3, 하상]

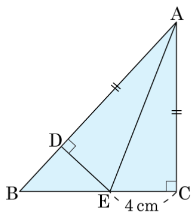
① $\overline{IA}$ ② $\overline{IE}$ ③ $\overline{IC}$

④ $\overline{IB}$ ⑤ $\overline{AF}$

해설

$\triangle IBE \equiv \triangle IBD$(RHA 합동)이므로 $\overline{ID}$와 대응변인 $\overline{IE}$의 길이가 같고, $\triangle ICE \equiv \triangle ICF$(RHA 합동)이므로 $\overline{IE}$와 대응변인 $\overline{IF}$의 길이가 같다.
따라서 빈 칸에 공통으로 $\overline{IE}$가 들어간다.

10. 다음 직각삼각형 ABC 에서 $\overline{AC} = \overline{AD}$ 인 점 D 를 잡고 $\overline{AB} \perp \overline{DE}$ 인 점 E 를 잡았다. $\overline{EC} = 4\text{cm}$ 일 때, $\overline{DE}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

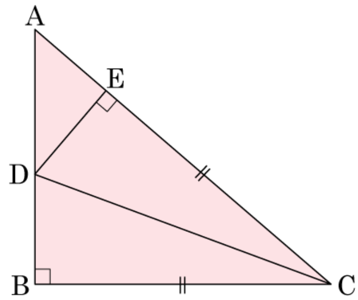
▶ 답 :

▷ 정답 : $4\,\text{cm}$

해설

$\triangle ACE \equiv \triangle ADE$(RHS합동) 이므로
$\overline{DE} = \overline{EC} = 4\text{cm}$

11. $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. $\angle DEC = 90°$, $\overline{BC} = \overline{EC}$이고, $\triangle DBC \equiv \triangle DEC$ (RHS 합동)을 증명하기 위해 필요한 조건을 보기에서 <u>모두</u> 골라라.



보기

㉠ $\overline{BC} = \overline{EC}$

㉡ $\angle DBC = \angle DEC$

㉢ $\triangle DBC \equiv \triangle DEC$

㉣ $\overline{DB} = \overline{DE}$

㉤ $\angle DAE = \angle BDC$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

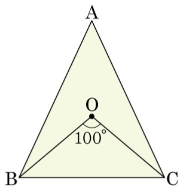
▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

해설

RHS 합동은 두 직각삼각형의 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으면 합동이다.
두 직각삼각형은 $\angle DBC = \angle DEC$이다.
빗변의 길이 $\overline{CD}$는 공통된 변으로 같다.
$\overline{BC} = \overline{EC}$이므로 빗변이 아닌 다른 한 변의 길이가 같다.
따라서 $\triangle DBC \equiv \triangle DEC$ (RHS 합동) 라고 할 수 있다. 필요한 것은 ㉠, ㉡이다.

12. 다음 그림에서 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이다. $\angle BOC = 100°$ 일 때, $\angle A$ 의 크기를 구하여라.



[배점 3, 중하]

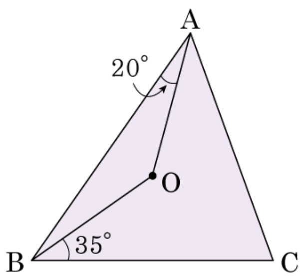
▶ 답:

▷ 정답: 50 °

해설

$\angle A = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 100° = 50°$

13. 다음 그림에서 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이다. $\angle OAB = 20°$, $\angle OBC = 35°$ 일 때, $\angle C$ 의 크기를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 70 °

해설

$\overline{OC}$ 를 이으면

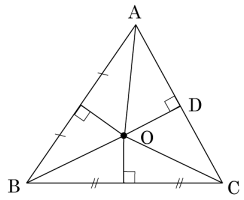
$\angle OAB + \angle OBC + \angle OCA = 90°$ 이므로

$20° + 35° + \angle OCA = 90°$, $\angle OCA = 35°$

$\angle OBC = \angle OCB = 35°$

$\therefore\ \angle C = \angle OCB + \angle OCA = 70°$

14. 다음은 「삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.」를 증명하는 과정이다. □ 안에 들어갈 알맞은 것은?



위 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 수직이등분선의 교점을 O 라 하고,
점 O 에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 D 라 하자.
점 O 는 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선 위에 있으므로
$\overline{OA} = \overline{OB}$ ······㉠
또, 점 O 는 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선 위에 있으므로
$\overline{OB} = \overline{OC}$ ······㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{OA} = \boxed{}$
$\triangle AOD$ 와 $\triangle COD$ 에서 $\angle ADO = \angle CDO = 90°$
$\overline{OA} = \boxed{}$
$\overline{OD}$ 는 공통
$\therefore \triangle AOD \equiv \triangle COD$ (RHS 합동)
따라서, $\overline{AD} = \overline{CD}$ 이므로 $\overline{OD}$ 는 $\overline{AC}$ 의 수직이등분선이 된다.
즉, $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점 O 에서 만난다.

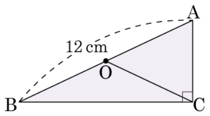
[배점 3, 중하]

① $\overline{OC}$ ② $\overline{OD}$ ③ $\overline{OA}$
④ $\overline{AD}$ ⑤ $\overline{CD}$

해설

$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OB} = \overline{OC}$ 이므로 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 이다.

15. 다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC 에서 점 O 는 $\triangle ABC$ 의 외심이다. $\overline{AB} = 12\text{cm}$ 일 때, $\overline{OC}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

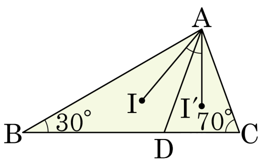
▶ 답 :

▷ 정답 : 6 cm

해설

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점에 있다.
$\therefore \overline{CO} = \overline{AO} = \overline{BO} = 6(\text{cm})$

16. 다음 그림에서 점 I, I′ 는 각각 $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 의 내심이다. $\angle B = 30°$, $\angle C = 70°$ 일 때, $\angle IAI'$ 의 크기를 구하여라.



[배점 3, 중하]

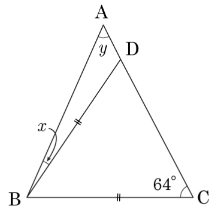
▶ 답 :

▷ 정답 : 40 °

해설

$\angle BAI = \angle IAD$, $\angle DAI' = \angle I'AC$
$\angle A = 2\angle BAI + 2\angle DAI'$
$\triangle ABC$ 에서 $\angle A = 80\,°$ 이므로
$\angle IAI' = \angle BAI + \angle DAI' = \dfrac{1}{2}\angle A = 40\,°$

17. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다. $\overline{BC} = \overline{BD}$ 이고 $\angle C = 64°$ 일 때, $x + y$ 의 값은?



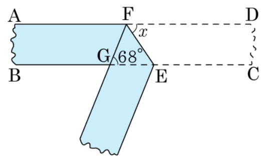
[배점 4, 중중]

① 61° ② 62° ③ 63°
④ 64° ⑤ 65°

해설

$\triangle BCD$ 는 $\overline{BC} = \overline{BD}$ 인 이등변삼각형이므로
$\angle BDC = 64°$
$\therefore x + y = 64°$

18. 다음 그림과 같이 폭이 일정한 종이 테이프를 접었다. $\angle FGE = 68\,°$ 일 때, $\angle DFE$ 의 크기는?



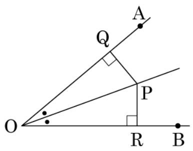
[배점 4, 중중]

① 36 ° ② 42 ° ③ 50 °
④ 56 ° ⑤ 60 °

해설

$\angle DFE = \angle EFG = \angle x$ (종이 접은 각)
$\angle DFE = \angle FEG = \angle x$ (엇각)
$\therefore \angle EFG = \angle FEG = \angle x$
따라서 $\triangle EFG$는 밑각의 크기가 같고, $\overline{GF} = \overline{EG}$인 이등변삼각형이다.
$\therefore \ \angle DFE = \frac{1}{2}(180° - 68°) = 56°$

19. 다음 그림은「한 점 P 에서 두 변 OA, OB 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 할 때, $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이면 $\overline{OP}$ 는 $\angle AOB$ 의 이등분선이다.」를 증명하기 위해 그린 것이다. 다음 중 필요한 조건이 아닌 것은?



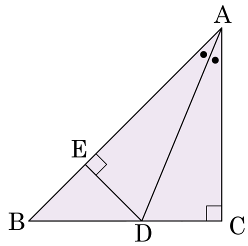
[배점 4, 중중]

① $\overline{PQ} = \overline{PR}$
② $\overline{OP}$ 는 공통
③ $\angle PQO = \angle PRO$
④ $\angle QOP = \angle ROP$
⑤ $\triangle POQ \equiv \triangle POR$

해설

④는 증명해야 할 대상이므로 조건이 아니다.
$\triangle QPO$ 와 $\triangle RPO$ 에서
i) $\overline{OP}$ 는 공통 (②)
ii) $\overline{PQ} = \overline{PR}$ (가정) (①)
iii) $\angle PQO = \angle PRO = 90°$ (가정) (③)
i), ii), iii) 에 의해 $\triangle QPO \equiv \triangle RPO$ (RHS 합동) (⑤) 이다.
합동인 도형의 대응각은 같으므로
$\angle QOP = \angle ROP$ 이므로 $\overline{OP}$ 는 $\angle AOB$ 의 이등분선이다.

20. $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형에 꼭짓점 A 의 이등분선이 밑변 BC 와 만나는 점을 D , D 에서 빗변AB 에 수선을 그어 만나는 점을 E 라 할 때, 다음 중 올바른 것을 모두 고르면?



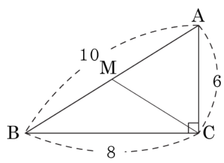
[배점 4, 중중]

① $\overline{BD} = \overline{CD}$
② $\triangle ADC \equiv \triangle ADE$
③ $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AB}$
④ $\angle ADE = 67.5°$
⑤ 점 D 는 $\triangle ABC$ 의 내심

해설

$\triangle AED \equiv \triangle ACD$(RHA합동)
$\triangle EBD$ 는 이등변 삼각형이므로
$\overline{EB} = \overline{ED}$ 이고 $\triangle AED \equiv \triangle ACD$(RHA합동) 이므로 $\overline{CD} = \overline{ED}$
따라서 $\overline{EB} = \overline{ED} = \overline{CD}$ 이다.
$\therefore \angle ADE = 180° - (90° + 22.5°) = 67.5°$
③ $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AB}$

21. 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점을 M이라고 할 때, $\overline{MC}$의 길이는?



[배점 4, 중중]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

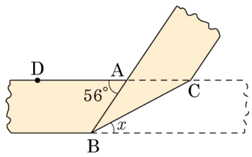
해설

점 M은 직각삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{MC}$이다.

$\therefore\ \overline{MC}=5$

22. 다음 그림과 같이 폭이 일정한 종이 테이프를 접었다. $\angle BAD=56°$일 때, $\angle x$의 크기는?

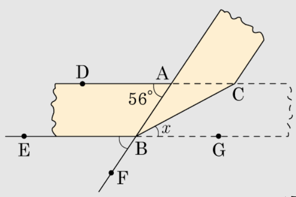


[배점 5, 중상]

① $20°$ ② $22°$ ③ $24°$

④ $26°$ ⑤ $28°$

해설



$\angle DAB=\angle EBF=56°$ (동위각)

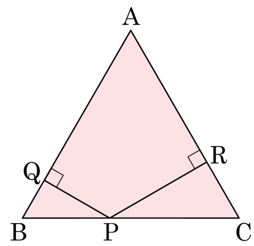
$\angle EBF=\angle ABG=56°$ (맞꼭지각)

(또는 $\angle DAB=\angle ABG=56°$ (엇각))

$\angle ABC=\angle CBG=\dfrac{1}{2}\times 56°=28°$ (종이 접은 각)

$\therefore \angle x=28°$

23. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 $\triangle ABC$ 에서 밑변 BC 위의 한 점 P 에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 한다. $\overline{PQ}=3\text{cm}$, $\overline{PR}=5\text{cm}$ 일 때, 점 B 에서 $\overline{AC}$ 에 이르는 거리는?

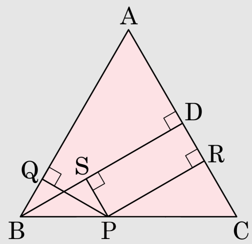


[배점 5, 중상]

① 5cm ② 7cm ③ 8cm

④ 10cm ⑤ 12cm

해설



B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 D

P에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{AB}=\overline{AC}$ 이므로 $\angle BPS=\angle C$

$\therefore \angle QBP=\angle SPB\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$\triangle QBP\equiv\triangle SPB$ (RHA 합동)

$\therefore\ \overline{QP}=\overline{SB}\ \cdots$㉣

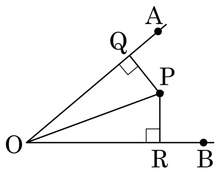
또, □SPRD 는 직사각형이므로

$\overline{PR}=\overline{SD}\ \cdots$㉤

㉣, ㉤에서 $\overline{QP}+\overline{PR}=\overline{BS}+\overline{SD}=\overline{BD}$

$\therefore\ \overline{BD}=3+5=8(\text{cm})$

24. 다음 그림과 같이 $\angle AOB$ 의 내부의 한 점 P 에서 각 변에 수선을 그어 그 교점을 Q, R 이라 하자. $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이라면, $\overline{OP}$ 는 $\angle AOB$ 의 이등분선임을 증명하는 과정에서 $\triangle QOP \equiv \triangle ROP$ 임을 보이게 된다. 이 때 사용되는 삼각형의 합동 조건은?



[배점 5, 중상]

① 두 변과 그 사이 끼인각이 같다.

② 한 변과 그 양끝각이 같다.

③ 세 변의 길이가 같다.

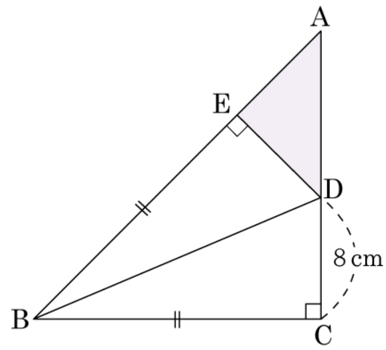
④ 직각삼각형의 빗변과 한 변의 길이가 각각 같다.

⑤ 직각삼각형의 빗변과 한 예각의 크기가 각각 같다.

해설

$\overline{OP}$ 는 공통이고 $\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로, 빗변과 다른 한 변의 길이가 같은 RHS 합동이다.

25. 그림에서 $\triangle ABC$는 $\angle C = 90°$이고 $\overline{AC} = \overline{BC}$인 직각이등변삼각형이다. $\overline{BC} = \overline{BE}$, $\overline{AB} \perp \overline{DE}$이고 $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$일 때, $\triangle AED$의 넓이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $32\,\text{cm}^2$

해설

$\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이므로 $\angle BAC = 45°$이다.
따라서 $\triangle AED$도 직각이등변삼각형이다.
$\triangle EDB \equiv \triangle CDB$ (RHS 합동),
$\overline{CD} = \overline{ED}$이므로 $\overline{ED} = \overline{EA}$이다.
그러므로, $\triangle AED$는 밑변 $8\,\text{cm}$, 높이 $8\,\text{cm}$인 직각이등변 삼각형이다.
따라서, 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32\ (\text{cm}^2)$이다.