

단원 형성 평가

1. $\frac{2}{125}$ 를 유한소수로 나타내기 위하여 $\frac{a}{10^n}$ 의 꼴로 고칠 때, $a+n$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a, n 은 자연수)
[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$$\frac{2}{125} = \frac{2}{5^3} \text{의 분자, 분모에 } 2^3 \text{ 을 곱하면 } \frac{2^4}{2^3 \times 5^3} = \frac{16}{10^3}$$

$\therefore a = 16, n = 3, a + n = 16 + 3 = 19$

2. 유리수 $\frac{n}{42}$ 을 유한소수가 되게 하는 n 의 개수를 구하여라. (단, $1 \leq n \leq 200$ 인 정수) [배점 3, 중하]

▶ 답 :

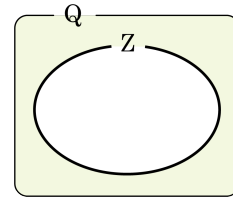
▷ 정답 : 9 개

해설

$$\frac{n}{42} = \frac{n}{2 \times 3 \times 7}$$

따라서 n 은 $3 \times 7 = 21$ 의 배수이다.
 $200 \div 21 = 9.52\dots$ 이므로 n 의 개수는 9 개 이다.

3. 정수의 집합을 Z , 유리수의 집합을 Q 라고 할 때, 다음 보기 중 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분에 속하는 것을 모두 고르면?



- | | | |
|------------------|-----------------|---------|
| ㉠ -3 | ㉡ $\frac{5}{2}$ | ㉢ 0.3 |
| ㉣ $\frac{12}{4}$ | ㉤ 0 | |

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉡, ㉤
④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉣, ㉤, ㉥

해설

색칠한 부분 : 정수가 아닌 유리수 이다.

$$\text{㉣ } \frac{12}{4} = 3 \text{ 이므로 정수이다.}$$

따라서, 정수가 아닌 유리수는 ㉡, ㉢이다.

4. 자연수 전체의 집합을 N , 정수 전체의 집합을 Z , 유리수 전체의 집합을 Q 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은 모두 몇 개인가?

- | | |
|------------------------|--------------------|
| ㉠ $-1 \notin N$ | ㉡ $3 \notin Z$ |
| ㉢ $\frac{5}{3} \in N$ | ㉣ $-1.23 \notin Q$ |
| ㉤ $\frac{7}{12} \in Q$ | |

[배점 4, 중중]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

- ㉠ -1은 음의 정수
 ㉡ 3은 정수
 ㉢ $\frac{5}{3}$ 는 정수가 아닌 유리수
 ㉣ -1.23은 정수가 아닌 유리수
 ㉤ $\frac{7}{12}$ 는 정수가 아닌 유리수
 즉, 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢, ㉤로 3개이다.

5. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{9}, \frac{9}{12}\}$, $B = \{x | x \text{는 유한소수}\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 는? [배점 4, 중중]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

A 집합에서 유한소수의 개수를 찾는 문제이다.
 유한소수의 분모의 소인수는 2나 5가 되어야 하므로, $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{5}{8}, \frac{9}{12}$ 으로 5개가 된다.

6. $Q = \{x | x \text{는 유리수}\}$ 의 세 부분집합이
 $X = \{x | x = \frac{k}{60}, k = 1, 2, \dots, 100\}$, $Y = \{x | x \text{는 유한소수로 나타낼 수 있는 수}\}$,
 $N = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 일 때, $n((X \cap Y) - N)$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 32

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 k 는 3의 배수, 따라서 33개, 자연수는 아니므로 60의 배수 1개를 제외하면
 $\therefore n((X \cap Y) - N) = 32$

7. 유리수 $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ 중에서 유한소수는 모두 몇 개인가? [배점 5, 중상]

- ① 8개 ② 9개 ③ 10개
 ④ 11개 ⑤ 12개

해설

분모가 2의 거듭제곱으로만 $2^4, 2^5, 2^6$
 분모가 5의 거듭제곱으로만 5^2
 2와 5의 거듭제곱으로만 $2 \times 5, 2^2 \times 5, 2^3 \times 5, 2^4 \times 5, 2 \times 5^2, 2^2 \times 5^2$
 $\therefore$ 10개

8. 집합 $\{x | 1 \leq x \leq 30, x \text{는 자연수}\}$ 의 원소 x 에 대하여 $\frac{1}{2 \times 5^2 \times x}$ 가 유한소수로 나타내어진다고 한다. 이때, x 가 될 수 있는 수는 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 9개

해설

분모의 소인수가 2나 5뿐이면 유한소수로 나타낼 수 있다.
 따라서 x 에 들어갈 숫자는
 $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 5^1, 5^2, 2^1 \times 5^1, 2^2 \times 5^1$ 으로 총 9개이다.

9. 자연수 A, B 가 다음 식을 만족할 때, A, B 를 동시에 만족하는 값을 구하여 $A + B$ 의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{1}{60} \times A = \frac{1}{B} \quad (\text{단, } \frac{1}{B} \text{ 은 유한소수})$$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\frac{1}{60} \times A$ 가 유한소수이려면 A 는 3의 배수이어야 하고 $\frac{1}{60} = \frac{1}{AB}$, $AB = 60$ 이므로 (A, B) 를 구하면 $(3, 20), (6, 10), (12, 5), (15, 4)$ 이다.
따라서 $A + B$ 의 최솟값은 16이다.

10. $3^n(2^n + 2^{n+1})$ 의 약수의 개수가 30 개일 때, 자연수 n 을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} 3^n(2^n + 2^{n+1}) &= 3^n(2^n + 2 \times 2^n) \\ &= 3^n \times 3 \times 2^n \\ &= 3^{n+1} \times 2^n \end{aligned}$$

따라서 약수의 개수는 $(n+2)(n+1) = 30$ 이므로 $n+2 = 6, n+1 = 5$
 $\therefore n = 4$

11. 자연수 n 에 대하여 $30^n = x$ 일 때, $(2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n$ 을 x 에 관한 가장 간단한 식으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $30x$

해설

$$\begin{aligned} &(2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n + 2^n 2^1 3^n + 2^n 3^n 3^2 + 2^n 2^1 3^n 3^2) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n 5^n) + 2 \times (2^n 3^n 5^n) + 9 \times (2^n 3^n 5^n) \\ &\quad + 18 \times (2^n 3^n 5^n) \\ &2^n 3^n 5^n = 30^n = x \text{ 이므로} \\ &\therefore (2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ &= x + 2x + 9x + 18x = 30x \end{aligned}$$

12. $\frac{a}{2^3 \times 7}$ 를 약분하면 $\frac{1}{b}$ 이 되고, 이것을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이때, 정수 a, b 의 값을 구하여라. (단, $10 < a < 15$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 14$

▷ 정답 : $b = 4$

해설

$\frac{a}{2^3 \times 7}$ 가 유한소수가 되어야 하므로 a 는 7의 배수이어야 한다.
따라서 $a = 14$ 이고, $\frac{14}{56} = \frac{1}{4}$ 이 되므로 $b = 4$ 이다.

13. 전체집합이 유리수의 집합이고 그 부분집합이 다음과 같을 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

$$A = \{x \mid x \text{는 무한소수}\}$$

$$B = \left\{x \mid x = \frac{n}{150}, n \text{은 } 100 \text{이하의 자연수}\right\}$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

해설

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

n 이 3 의 배수이면 $\frac{n}{150}$ 은 유한소수

$$100 \div 3 = 33 \cdots 1$$

$$\therefore n(A \cap B) = 100 - 33 = 67$$

14. 자연수 n 과 유리수 x, y 에 대하여 $xy = -1$ 일 때,
 $x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$
 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$xy = -1 \text{ 이면 } \frac{1}{x} = -y, \frac{1}{y} = -x \text{ 이므로}$$

$$x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$$

$$+ (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$$

$$= x^{2n-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1} + y^{2n-1} + \left(\frac{1}{y}\right)^{2n-1}$$

$$+ (-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n}$$

$$= x^{2n-1} + (-y)^{2n-1} + y^{2n-1} + (-x)^{2n-1}$$

$$+ (-1)^{2n-1} + (-1)^{2n-1}$$

자연수 n 에 대하여 $2n - 1$ 은 홀수이므로

$$\therefore x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$$

$$+ (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$$

$$= x^{2n-1} - y^{2n-1} + y^{2n-1} - x^{2n-1} - 1 - 1$$

$$= -2$$

15. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 8^8 과 크기가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

1	1	1	1	...
2	4	8	16	...
3	9	27	81	...
4	16	64	256	...
...	...	...	...	...

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 번

해설

$$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24} \text{ 으로 나타낼 수 있다.}$$

자연수 m, n 에 대하여 $(2^m)^n = 2^{mn} = 2^{24}$ 일 때, $mn = 24$ 가 되는 순서쌍 (m, n) 은 24 의 약수의 개수만큼 나타난다.

따라서 $24 = 2^3 \times 3$ 에서 24 의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1) = 8$ (개) 이므로 8^8 과 크기가 같은 수는 모두 8 번 나온다.