

단원 종합 평가

1. 유리수 $\frac{n}{42}$ 을 유한소수가 되게 하는 n 의 개수를 구하라. (단, $1 \leq n \leq 200$ 인 정수) [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 9개

해설

$$\frac{n}{42} = \frac{n}{2 \times 3 \times 7}$$

따라서 n 은 $3 \times 7 = 21$ 의 배수이다.

$200 \div 21 = 9.52\dots$ 이므로 n 의 개수는 9개 이다.

2. 분수 $\frac{a}{180}$ 가 유한소수가 되도록 하는 a 의 값을 구하라. (단, $10 < a < 20$) [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$$\frac{a}{180} = \frac{a}{2^2 \times 3^2 \times 5} \text{가 유한소수가 되려면 } a \text{ 는 } 9 \text{ 의 배수}$$

$10 < a < 20$ 인 9 의 배수 $a = 18$

3. 순환소수 $0.03\bar{8}$ 에 어떤 자연수 n 을 곱하면 유한소수가 된다고 할 때, n 의 값 중 가장 작은 것은?

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$0.03\bar{8} = \frac{35}{900} = \frac{7}{180} = \frac{7}{2^2 \times 3^2 \times 5}$$

$\frac{7}{2^2 \times 3^2 \times 5} \times n$ 이 유한소수가 되려면 3^2 이 약분되어야 하므로 n 은 3^2 의 배수이어야 한다.

$$n = 9$$

4. 다음 중 유한소수인 것을 모두 골라 기호를 써라.

㉠ $\frac{39}{30}$

㉡ $\frac{37}{150}$

㉢ $\frac{17}{12}$

㉣ $\frac{3^2 \times 7}{2^2 \times 3 \times 5}$

㉤ $\frac{3}{20}$

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉢

▷ 정답: ㉤

해설

약분하여 분모가 2 와 5 뿐인 분수를 찾는다.

㉠ $\frac{13}{10} = \frac{13}{2 \times 5}$

㉡ $\frac{37}{150} = \frac{37}{2 \times 3^2 \times 5}$

㉢ $\frac{17}{12} = \frac{17}{2^2 \times 3}$

㉣ $\frac{3 \times 7}{2^2 \times 5}$

㉤ $\frac{3}{2^2 \times 5}$

5. 다음은 $\frac{21}{120}$ 의 분모를 10의 거듭제곱 꼴로 고쳐서 소수로 나타내는 과정이다. A, B에 들어가는 수의 합을 구하여라.

$$\frac{21}{120} = \frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} = \frac{7 \times A}{2^3 \times 5 \times B} = \frac{175}{1000} = 0.175$$

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{21}{120} = \frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} = \frac{7 \times 5^2}{2^3 \times 5 \times 5^2} = \frac{175}{1000} = 0.175 \text{에서}$$

A, B에 들어가는 숫자는 각각 5^2 이다.

∴ A + B = 50

6. 분수 $\frac{21}{2^2 \times 5^3 \times 7 \times a}$ 을 소수로 나타내면 무한소수가 된다고 할 때, 집합 {2, 4, 6, 9, 12, 18} 중 a의 값이 될 수 없는 것을 모두 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 18

해설

a가 2, 4, 6, 12가 되면 유한소수가 되므로 a의 값은 9, 18이다.

7. k는 200 이하의 자연수일 때, $\frac{k}{55}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되는 k의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 개

해설

$\frac{k}{11 \times 5}$ 는 유한소수이므로 k는 11의 배수이다. 따라서 k의 개수는 $18 - 3(55\text{의 배수}) = 15$ (개)

8. 1보다 작은 분수 $\frac{6}{a}$ 을 소수로 나타내면 소수 첫째 자리의 수가 3인 유한소수가 될 때, 자연수 a의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

▷ 정답 : 20

해설

$$\frac{6}{a} = 0.3 \times \times \times \text{이고,}$$

$$0.3 = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$

$$0.4 = \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \text{이므로 } a = 16, 20 \text{이다.}$$

9. $\frac{a}{180}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 고치면 $\frac{7}{b}$ 이다. a가 두 자리의 자연수일 때, a + b의 값은? [배점 5, 중상]

① 73 ② 75 ③ 83 ④ 89 ⑤ 90

해설

$\frac{a}{180} = \frac{a}{2^2 \times 3^2 \times 5}$ 가 유한소수이려면 a 는 9 의 배수이어야 하고, 기약분수로 고치면 $\frac{7}{b}$ 이므로 a 는 7 의 배수이다.

따라서 a 는 $3^2 \times 7 \times n$ 인 두 자리의 자연수이므로 63 이다. $\frac{63}{180} = \frac{7}{20}$ 이므로 $b = 20$ 이다.
따라서 $a + b = 83$ 이다.

10. 분수 $\frac{3}{2^2 \times 5^3 \times a}$ 을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 100 미만의 자연수 중에서 a 가 될 수 있는 가장 큰 수 x , 100 초과와 자연수 중에서 a 가 될 수 있는 가장 작은 수 y 일 때, $y - x$ 를 구하면? [배점 5, 중상]

① 4 ② 20 ③ 24 ④ 37 ⑤ 50

해설

유한소수의 분모의 소인수는 2나 5가 되어야 하는데 분자에 3이 있으므로,

a 의 값은 3의 배수가 되어야 한다.

100 미만의 자연수 중 소인수를 2와 5를 가지고 있는 가장 큰 3의 배수는

$2^5 \times 3 = 96$ 이고,

100 초과와 자연수 중 가장 작은 수는 $2^3 \times 5 \times 3 = 120$ 이 된다.

따라서, 두 수의 차는 $y - x = 120 - 96 = 24$ 이다.

11. A 가 자연수일 때, $\frac{35}{84} \times A$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 이때, 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 3

해설

$$\frac{35}{84} = \frac{5 \times 7}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{5}{2^2 \times 3}$$

$$\therefore A = 3$$

12. 분수 $\frac{6}{2^2 \times 5^3 \times a}$ 을 소수로 나타내면 유한소수가 된다. 두 자리 자연수 중에서 a 가 될 수 있는 가장 큰 수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 96

해설

$$96 = 2^5 \times 3$$

13. $3^n(2^n + 2^{n+1})$ 의 약수의 개수가 30 개일 때, 자연수 n 을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 4

해설

$$3^n(2^n + 2^{n+1}) = 3^n(2^n + 2 \times 2^n)$$

$$= 3^n \times 3 \times 2^n$$

$$= 3^{n+1} \times 2^n$$

따라서 약수의 개수는 $(n+2)(n+1) = 30$ 이므로

$$n+2 = 6, n+1 = 5$$

$$\therefore n = 4$$

14. 분수 $\frac{a}{120}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이 될 때, 양의 정수 a 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라. (단, $a < 100$)

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

분모가 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 a 는 3의 배수이고, 기약분수로 고쳤을 때 $\frac{3}{b}$ 이므로 a 는 9의 배수가 된다. 따라서 a 의 최댓값은 81, a 의 최솟값은 9가 된다.

$$\therefore 81 - 9 = 72$$

15. 자연수 n 과 유리수 x, y 에 대하여 $xy = -1$ 일 때, $x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned} xy = -1 \text{ 이면 } \frac{1}{x} = -y, \frac{1}{y} = -x \text{ 이므로} \\ x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} \\ + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n} \\ = x^{2n-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1} + y^{2n-1} + \left(\frac{1}{y}\right)^{2n-1} \\ + (-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n} \\ = x^{2n-1} + (-y)^{2n-1} + y^{2n-1} + (-x)^{2n-1} \\ + (-1)^{2n-1} + (-1)^{2n-1} \\ \text{자연수 } n \text{ 에 대하여 } 2n-1 \text{ 은 홀수이므로} \\ \therefore x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} \\ + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n} \\ = x^{2n-1} - y^{2n-1} + y^{2n-1} - x^{2n-1} - 1 - 1 \\ = -2 \end{aligned}$$