

단원 종합 평가

1. 분수 $\frac{a}{180}$ 가 유한소수가 되도록 하는 a 의 값을 구하여라. (단, $10 < a < 20$) [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$\frac{a}{180} = \frac{a}{2^2 \times 3^2 \times 5}$ 가 유한소수가 되려면 a 는 9의 배수

$10 < a < 20$ 인 9의 배수 $a = 18$

2. 유리수 $\frac{n}{42}$ 을 유한소수가 되게 하는 n 의 개수를 구하여라. (단, $1 \leq n \leq 200$ 인 정수) [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9개

해설

$$\frac{n}{42} = \frac{n}{2 \times 3 \times 7}$$

따라서 n 은 $3 \times 7 = 21$ 의 배수이다.

$200 \div 21 = 9.52\dots$ 이므로 n 의 개수는 9개이다.

3. 집합 $A = \{\frac{b}{a} \mid a, b \text{는 정수}, a \neq 0\}$ 일 때, 다음 중에서 집합 A 의 원소가 되는 것은 몇 개인가?

㉠ $\frac{7}{2^2 \times 7^2}$

㉡ π

㉢ $\frac{5}{2^2 \times 3^2}$

㉣ $0.89898989\dots$

㉤ $0.159272\dots$

[배점 4, 중중]

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

유리수는 분수로 나타낼 수 있는 수이며 유한소수, 순환소수, 정수가 포함된다.

㉠, ㉢처럼 순환하지 않는 무한소수는 유리수가 아니다.

4. 집합 $A = \{\frac{1}{x} \mid 10 \leq x \leq 20, x \text{는 자연수}\}$ 의 원소 중 유한소수로 나타낼 수 있는 원소의 갯수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3개

해설

유한소수를 기약분수로 나타내려면 분모의 소인수가 2나 5뿐이어야 한다.

따라서, x 의 값은 2×5 , 2^4 , $2^2 \times 5$ 으로 3개가 된다.

5. 분수 $\frac{21}{2^2 \times 5 \times a}$ 을 소수로 나타내면 유한소수가 된다고 할 때, a 의 값으로 적당하지 않은 것은?

[배점 4, 중중]

① 3

② 7

③ 14

④ 36

⑤ 42

해설

$\frac{21}{2^2 \times 5 \times a}$ 이 유한소수이기 위해서는 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2나 5뿐이어야 한다. 그런데 분자에 $21 = 3 \times 7$, 즉 소인수 3과 7이 있으므로 분모에 2나 5이외에 3 또는 7이 하나씩 더 있어도 유한소수로 나타낼 수 있다.

- ① $\frac{21}{2^2 \times 5 \times 3} = \frac{7}{2^2 \times 5}$ (유한소수)
- ② $\frac{21}{2^2 \times 5 \times 7} = \frac{3}{2^2 \times 5}$ (유한소수)
- ③ $\frac{21}{2^2 \times 5 \times 14} = \frac{3}{2^3 \times 5}$ (유한소수)
- ④ $\frac{21}{2^2 \times 5 \times 36} = \frac{7}{2^4 \times 3 \times 5}$ (무한소수)
- ⑤ $\frac{21}{2^2 \times 5 \times 42} = \frac{1}{2^3 \times 5}$ (유한소수)

6. 집합 $\{x \mid 1 \leq x \leq 30, x \text{는 자연수}\}$ 의 원소 x 에 대하여 $\frac{1}{2 \times 5^2 \times x}$ 가 유한소수로 나타내어진다고 한다. 이 때, x 가 될 수 있는 수는 모두 몇 개인지 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9개

해설

분모의 소인수가 2나 5뿐이면 유한소수로 나타낼 수 있다.

따라서 x 에 들어갈 숫자는

$1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 5^1, 5^2, 2^1 \times 5^1, 2^2 \times 5^1$ 으로 총 9개이다.

7. $Q = \{x \mid x \text{는 유리수}\}$ 의 세 부분집합이
 $X = \{x \mid x = \frac{k}{60}, k = 1, 2, \dots, 100\}$, $Y = \{x \mid x \text{는 유한소수로 나타낼 수 있는 수}\}$,
 $N = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 일 때, $n((X \cap Y) - N)$ 를 구하여라.
 [배점 5, 중상]

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 32

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 k 는 3의 배수, 따라서 33개, 자연수는 아니므로 60의 배수 1개를 제외하면
 $\therefore n((X \cap Y) - N) = 32$

8. $\frac{a}{450}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{A}{B}$ 라고 할 때, 다음과 같은 조건을 만족할 때, $A + B$ 의 값을 구하여라.

- i) $11 \leq a \leq 55$, a 는 정수
- ii) A 는 3의 배수
- iii) B 는 2의 배수

[배점 5, 중상]

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 53

해설

i) $\frac{a}{450} = \frac{a}{2 \times 3^2 \times 5^2}$ 가 유한소수이므로 a 는 9의 배수이고, $11 \leq a \leq 55$ 를 만족하는 a 의 값은 18, 27, 36, 45, 54이다.

ii) $a = 18$ 이면 $\frac{2 \times 3^2}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{25}$

$a = 27$ 이면 $\frac{3^3}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{3}{50}$

$a = 36$ 이면 $\frac{2^2 \times 3^2}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{2}{25}$

$a = 45$ 이면 $\frac{3^2 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{10}$

$a = 54$ 이면 $\frac{2 \times 3^3}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{3}{25}$

기약분수로 나타낸 $\frac{A}{B}$ 에서 A 가 3의 배수, B 가 2의 배수를 만족하는 a 의 값은 27이다.

$\therefore A + B = 50 + 3 = 53$

9. 분수 $\frac{3}{2 \times a}$ 을 소수로 나타내면 유한소수가 될 때, 한 자리의 자연수 a 의 값을 구하면 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 7 개

해설

$a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$

10. 분수 $\frac{a}{120}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이 될 때, 양의 정수 a 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라. (단, $a < 100$)

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 72

해설

분모가 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 a 는 3의 배수이고, 기약분수로 고쳤을 때 $\frac{3}{b}$ 이므로 a 는 9의 배수가 된다. 따라서 a 의 최댓값은 81, a 의 최솟값은 9가 된다.

$\therefore 81 - 9 = 72$

11. $\frac{a}{2^2 \times 3 \times 5}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이다. a 가 10 미만인 홀수일 때, $a + b$ 의 값은? [배점 5, 상하]

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

해설

$\frac{a}{2^2 \times 3 \times 5}$ 를 소수로 나타낼 때, 유한소수가 되려면 분모에 있는 3이 약분되어야 하므로 a 의 값은 3의 배수가 되어야 한다. 그리고 a 가 10 미만의 홀수이므로 a 는 3 또는 9이다. 그런데 이 식을 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이어야 하므로 $a = 9$ 이다.

또한 $\frac{9}{60} = \frac{3^2}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3}{20}$
 $\therefore b = 20$

$\therefore a + b = 9 + 20 = 29$

12. 두 분수 $\frac{7}{176}, \frac{11}{140}$ 에 어떤 세 자리 자연수 A 를 곱한 값은 모두 유한소수가 된다. 이것을 만족하는 n 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 11 개

해설

$\frac{7}{176} \times A = \frac{7 \times A}{2^4 \times 11}, \frac{11}{140} \times A = \frac{11 \times A}{2^2 \times 5 \times 7}$
 이 두 수가 두 유한소수가 되려면 분모에 2 나 5
 이외의 소인수가 없어야 하므로 A 는 7 과 11 의
 공배수, 즉 77 의 배수가 되어야 한다.
 77 의 배수 중 세 자리 자연수는
 $77 \times 2 = 154, 77 \times 3 = 231, \dots, 77 \times 12 = 924$
 이므로 구하는 수의 개수는 $12 - 1 = 11$ (개)

13. 분수 $\frac{a}{2^2 \times 11}$ 는 유한소수로 나타낼 수 있고 기약분수
 로 고치면 $\frac{1}{b}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, $a < 20$)
 [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{a}{2^2 \times 11}$ 가 유한소수이고 $a < 20$ 이므로 $a = 11$,
 $b = 4$
 $\therefore a + b = 15$

14. 다음과 같은 규칙으로 수를 나열하였을 때, 8^8 과 크기
 가 같은 수는 몇 번 나오는지 구하여라.

1	1	1	1	...
2	4	8	16	...
3	9	27	81	...
4	16	64	256	...
...	...	...	...	...

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 번

해설

$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ 으로 나타낼 수 있다.
 자연수 m, n 에 대하여 $(2^m)^n = 2^{mn} = 2^{24}$ 일
 때, $mn = 24$ 가 되는 순서쌍 (m, n) 은 24 의 약
 수의 개수만큼 나타난다.
 따라서 $24 = 2^3 \times 3$ 에서 24 의 약수의 개수는
 $(3+1)(1+1) = 8$ (개) 이므로 8^8 과 크기가 같은
 수는 모두 8 번 나온다.

15. 자연수 n 과 유리수 x, y 에 대하여 $xy = -1$ 일 때,
 $x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$
 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$xy = -1$ 이면 $\frac{1}{x} = -y, \frac{1}{y} = -x$ 이므로
 $x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$
 $+ (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$
 $= x^{2n-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1} + y^{2n-1} + \left(\frac{1}{y}\right)^{2n-1}$
 $+ (-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n}$
 $= x^{2n-1} + (-y)^{2n-1} + y^{2n-1} + (-x)^{2n-1}$
 $+ (-1)^{2n-1} + (-1)^{2n-1}$
 자연수 n 에 대하여 $2n-1$ 은 홀수이므로
 $\therefore x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$
 $+ (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$
 $= x^{2n-1} - y^{2n-1} + y^{2n-1} - x^{2n-1} - 1 - 1$
 $= -2$