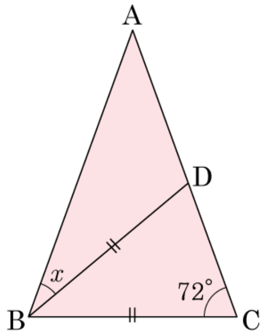
단원 형성 평가

1. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



[배점 3, 하상]

① $30°$ ② $32°$ ③ $34°$

④ $36°$ ⑤ $38°$

해설

$\triangle BCD$ 는 이등변삼각형이므로

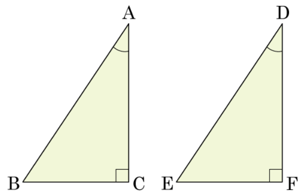
$\angle CBD = 180° - 2 \times 72° = 36°$

$\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle ABC = \angle ACB = 72°$

$\therefore \angle x = 72° - 36° = 36°$

2. 다음은 [빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동] 임을 증명하는 과정이다.



[가정] $\triangle ABC$ 와 $\triangle DEF$ 에서

$\angle C = \angle F = 90°$

$\overline{AB} = \overline{DE}$

$\angle A = \angle D$

[결론] $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

[증명] $\triangle ABC$ 과 $\triangle DEF$ 에서

$\angle C = \angle F = 90° \cdots$ ㉮

$\angle A = \angle D \cdots$ ㉯

$\angle B = \boxed{ㄱ} \cdots$ ㉰

$\overline{AB} = \boxed{ㄴ} \cdots$ ㉱

㉯, ㉰, ㉱ 로부터

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ($\boxed{ㄷ}$ 합동)

ㄱ ~ ㄷ 에 들어갈 것을 차례대로 나열한 것은?

[배점 3, 하상]

① $\angle E$, $\overline{DF}$, ASA ② $\angle F$, $\overline{DF}$, ASA

③ $\angle E$, $\overline{DE}$, ASA ④ $\angle F$, $\overline{DF}$, SAS

⑤ $\angle E$, $\overline{DE}$, SSS

해설

$\triangle ABC$ 과 $\triangle DEF$ 에서

$\angle C = \angle F \cdots$ ㉮

$\angle A = \angle D \cdots$ ㉯

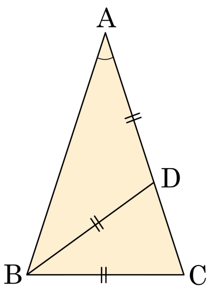
$\angle B = \angle E \cdots$ ㉰

$\overline{AB} = \overline{DE} \cdots$ ㉱

㉯, ㉰, ㉱ 로부터

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (ASA 합동)

3. 다음 그림에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BC}$일 때, $\angle A$의 크기를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $36\,°$

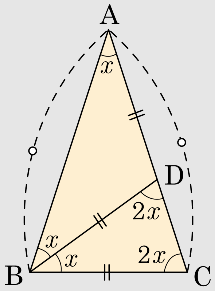
해설

$\angle A$ 의 크기를 x라고 하면

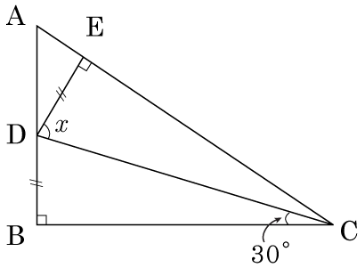
$2x + x + x + x = 180\,°$,

$5x = 180\,°$

$\therefore\ x = 36\,°$



4. 다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 점 D에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발이 E이고 $\overline{BD} = \overline{ED}$일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

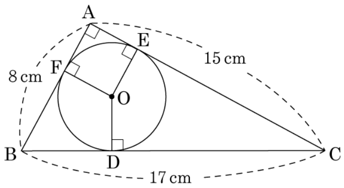
▷ 정답 : $60\,°$

해설

$\triangle$CDB와 삼각형 $\triangle$CDE는 RHS 합동이다.

$\angle x = \angle CDB$이므로 $\angle x = 60\,°$

5. 다음 그림에서 점 O는 직각삼각형 ABC의 내심이고 점 D, E, F는 내접원과 세 변의 접점이다.
이때, 선분 AF의 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3 cm

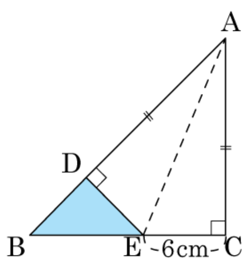
해설

$\overline{AF} = \overline{AE} = x\text{cm}$ 라고 하면

$\overline{BF} = \overline{BD} = 8 - x$,$\overline{CE} = \overline{CD} = 15 - x$

$\therefore 8 - x + 15 - x = 17, x = 3\,\text{cm}$

6. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이다. 빗변 AB 위에 $\overline{AC} = \overline{AD}$ 가 되게 점 D 를 잡고, 점 D 를 지나며 $\overline{AB}$ 에 수직인 직선과 $\overline{BC}$ 와의 교점을 E 라 할 때, $\overline{EC} = 6\text{cm}$ 이다. $\triangle BDE$ 의 넓이는?



[배점 4, 중중]

① 12cm^2 ② 14cm^2 ③ 16cm^2

④ 18cm^2 ⑤ 20cm^2

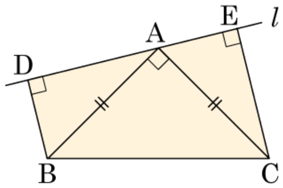
해설

$\triangle ADE \equiv \triangle ACE$ (RHS 합동) 이므로 $\overline{DE} = \overline{CE} = 6\text{cm}$,

$\triangle BDE$ 는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{DE} = \overline{DB} = 6\text{cm}$

$\therefore \triangle BDE = \dfrac{6 \times 6}{2} = 18(\text{cm}^2)$

7. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A = 90°$ 이다. $\overline{DB} = 4\text{cm}$, $\overline{EC} = 6\text{cm}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는 ?



[배점 4, 중중]

① 20cm^2 ② 24cm^2 ③ 26cm^2

④ 30cm^2 ⑤ 50cm^2

해설

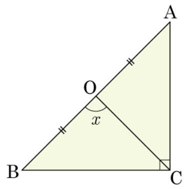
$\triangle ADB \equiv \triangle CEA$ 이므로 $\overline{DB} = \overline{EA} = 4\text{cm}$, $\overline{DA} = \overline{EC} = 6\text{cm}$ 이다.

$\square DBCE$ 의 넓이$= \dfrac{(4+6) \times 10}{2} = 50(\text{cm}^2)$ 이므로

$\triangle ABC = \square DBCE - \triangle ADB - \triangle CEA$

$= 50 - 12 - 12 = 26(\text{cm}^2)$

8. 다음 그림에서 점 O 는 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변의 중점이다. $\angle OCB : \angle OCA = 2 : 3$ 일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



[배점 4, 중중]

① $105°$ ② $106°$ ③ $107°$

④ $108°$ ⑤ $109°$

해설

직각삼각형의 빗변의 중점인 점 O 는 외심이 되므로 $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC}$ 이다.

$\angle OCB : \angle OCA = 2 : 3$ 이므로

$\angle OCB = \dfrac{2}{2+3} \times 90° = \dfrac{2}{5} \times 90° = 36°$

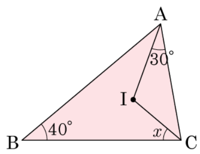
$\angle OCA = \dfrac{3}{2+3} \times 90° = \dfrac{3}{5} \times 90° = 54°$

$\triangle OBC$ 는 이등변삼각형이므로 ($\because \overline{OB} = \overline{OC}$)

$\angle OBC = \angle OCB = 36°$ 이고

삼각형 내각의 크기의 합이 $180°$ 이므로 $\angle BOC = 180° - 36° - 36° = 108°$

9. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 점 I는 내심이다. $\angle ABC = 40°$, $\angle CAI = 30°$일 때, $\angle x$의 크기를 구하여라.



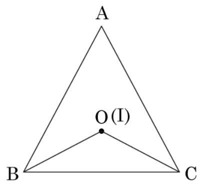
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $40°$

> 해설
>
> 점 I는 세 내각의 이등분선의 교점이므로
> $\angle B = 2 \times \angle IBA = 40\,^\circ$
> $\angle IBA = 20\,^\circ$
> $\angle IBA + \angle ICB + \angle IAC = 90\,^\circ$이므로
> $\angle x + 20\,^\circ + 30\,^\circ = 90\,^\circ$
> $\therefore x = 40\,^\circ$

10. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 외심 O 와 내심 I 가 일치할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



[배점 4, 중중]

① $\angle ABO = \angle BCO$

② $\overline{AB} = \overline{BC}$

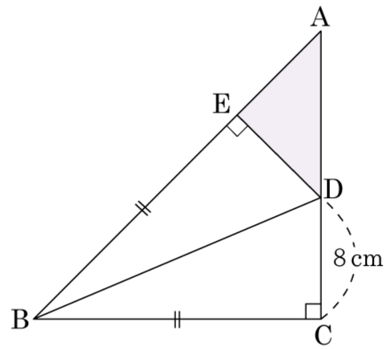
③ $\angle BOC = 120°$

④ $\angle A = 2\angle OCB$

⑤ $\angle OBC + \angle BAC = 100°$

> 해설
>
> $\triangle ABC$ 의 외심 O 와 내심 I 가 일치할 때는 삼각형이 정삼각형인 경우이므로
> $\angle BAC = 60°$ 이다.
> 따라서 $\angle BOC = 2\angle A = 120°$ 이고, $\triangle OBC$ 는 이등변삼각형이므로 $\angle OBC = 30°$ 이다.
> ⑤ $\angle OBC + \angle BAC = 60° + 30° = 90°$

11. 그림에서 $\triangle ABC$는 $\angle C = 90\,^\circ$이고 $\overline{AC} = \overline{BC}$인 직각이등변삼각형이다. $\overline{BC} = \overline{BE}$, $\overline{AB} \perp \overline{DE}$이고 $\overline{CD} = 8\,\text{cm}$일 때, $\triangle AED$의 넓이를 구하여라.



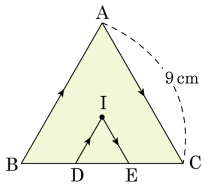
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $32\,\text{cm}^2$

> 해설
>
> $\triangle ABC$는 직각이등변삼각형이므로 $\angle BAC = 45\,^\circ$ 이다.
> 따라서 $\triangle AED$도 직각이등변삼각형이다.
> $\triangle EDB \equiv \triangle CDB$ (RHS 합동),
> $\overline{CD} = \overline{ED}$이므로 $\overline{ED} = \overline{EA}$이다.
> 그러므로, $\triangle AED$는 밑변 $8\,\text{cm}$, 높이 $8\,\text{cm}$인 직각이등변 삼각형이다.
> 따라서, 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32\ (\text{cm}^2)$이다.

12. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이고, 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. 점 I 를 지나면서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 에 평행한 직선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 각각 D , E 라 할 때, $\overline{DE} = (\quad)$cm 이다. 빈 칸에 알맞은 수를 써 넣어라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\angle ABI = \angle IBD$ 이고 $\angle ABI = \angle BID (\because \overline{AB} // \overline{ID})$ 이므로 $\angle IBD = \angle BID$ 이다.

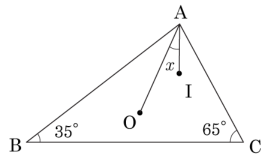
$\Rightarrow \overline{BD} = \overline{ID}$ 이다.

같은 방법으로 $\angle ACI = \angle ICE$ 이고 $\angle ACI = \angle CIE$ $(\because \overline{AC} // \overline{IE})$ 이므로 $\angle ICE = \angle CIE$ 이다.$\Rightarrow \overline{IE} = \overline{EC}$

따라서 ($\triangle IDE$ 의 둘레의 길이)$= \overline{ID} + \overline{DE} + \overline{IE} = \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC} = \overline{BC} = 9(\text{cm})$ 이고,

$\triangle IDE$ 는 정삼각형이므로 $\overline{DE} = \frac{9}{3}\text{cm} = 3\text{cm}$ 이다.

13. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\angle B = 35°$, $\angle C = 65°$ 이고, 점 O 와 점 I 는 각각 $\triangle ABC$ 의 외심과 내심일 때, $\angle x$ 의 크기를 구하여라. (단, 단위는 생략한다.)



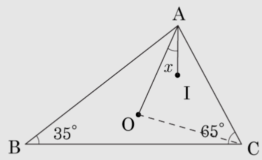
[배점 5, 중상]

① 10° ② 12° ③ 15°

④ 18° ⑤ 20°

해설

점 O 와 점 C 를 이으면,

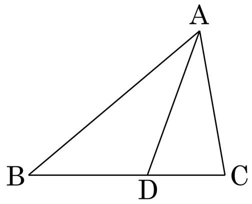


i) $\angle B = 35°$ 이므로 $\angle AOC = 70°$, $\angle OAC = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55°$ $\therefore \angle OAC = 55°$

ii) $\angle A = 180° - (35° + 65°) = 80°$ 이므로 $\angle IAC = \frac{1}{2} \times 80° = 40°$

$\angle x = \angle OAC - \angle IAC = 55° - 40° = 15°$ $\therefore$ $\angle x = 15°$

14. 다음 그림과 같은 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. $2\angle ABD = \angle ACD$ 이고, $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$ 라 할 때, 변 CD 의 길이를 a, b 를 사용한 식으로 나타내어라.

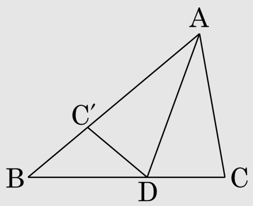


[배점 5, 상하]

▶ 답 :

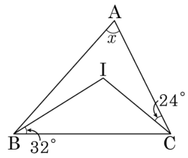
▷ 정답 : $a - b$

해설



위의 그림과 같이 $\overline{AC'} = \overline{AC}$ 인 점 C′ 를 잡으면
$\triangle ACD$ 와 $\triangle AC'D$ 에서
$\overline{AC'} = \overline{AC}$, $\angle C'AD = \angle CAD$, $\overline{AD}$ 는 공통이므로
$\triangle ACD \equiv \triangle AC'D$ (SAS 합동)
$\therefore\ \overline{C'D} = \overline{CD}$
또 $2\angle ABD = \angle ACD$ 이고
$\angle AC'D = \angle ABD + \angle C'DB$ 이므로
$\angle ABD = \angle C'DB$
즉, $\triangle C'BD$ 는 이등변삼각형이므로
$\overline{BC'} = \overline{C'D} = \overline{CD}$
$\therefore\ \overline{CD} = a - b$

15. 다음 그림에서 점 I는 $\triangle ABC$ 의 내심이다. $\angle x$ 의 값을 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $68°$

해설

점 I가 $\triangle ABC$ 의 내심일 때, $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ 이다.
점 I가 세 내각의 이등분선의 교점이므로 $\angle ACI = \angle ICB = 24°$ 이다.
삼각형의 내각의 합은 $180°$ 이므로 $\angle BIC = 180° - 32° - 24° = 124°$ 이다.
$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$, $124° = 90° + \frac{1}{2}\angle A$
$\therefore\ \angle A = 68°$