단원 종합 평가

1. 두 집합 $A=\{11,\ 13\}$, $B=\{9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\}$ 에 대하여 $A\subset X\subset B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 11, 13 을 모두 포함하는 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$ (개)

2. $A\subset B$ 이고 $n(A)=17,\ n(B)=35$ 일 때, $n(A\cap B),\ n(A\cup B)$ 를 각각 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $n(A\cap B)=\ 17$

▷ 정답 : $n(A\cup B)=\ 35$

해설

$A\subset B$ 이므로 $A\cap B=A$, $A\cup B=B$ 이다.
$n(A\cap B)=n(A)=17$
$n(A\cup B)=n(B)=35$

3. 다음 수 중에서 세 번째로 큰 수는? [배점 3, 중하]

① $1010_{(2)}$ 보다 2 큰 수

② 15보다 $10_{(2)}$ 작은 수

③ 2^4+2^3

④ $2^2\times3^2$

⑤ $10101_{(2)}$

해설

① $1010_{(2)}+2=10+2=12$
② $15-10_{(2)}=15-2=13$
③ $2^4+2^3=16+8=24$
④ $2^2\times3^2=4\times9=36$
⑤ $10101_{(2)}=21$
따라서 큰 수부터 차례로 나열하면
④, ③, ⑤, ②, ①이므로 세 번째로 큰 수는 ⑤ 이다.

4. 전체집합 $U=\{x\mid x\le1000$인 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{x\mid x$는 $2^3\times3$의 배수$\}$, $B=\{x\mid x$는 2×3^2의 배수$\}$ 에 대하여 $n(A\cap B)$ 를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$2^3 \times 3$ 과 2×3^2 의 최소공배수는 $2^3 \times 3^2 = 72$ 이다.

$A \cap B$

$= \{x \mid x$는 $2^3 \times 3$ 과 2×3^2의 공배수$\}$

$= \{x \mid x$는 $2^3 \times 3$ 과 2×3^2의 최소공배수의 배수$\}$

$= \{x \mid x$는 72의 배수$\}$

$\therefore\ 1000 \div 72 = 13 \cdots 64$

따라서 $n(A \cap B) = 13$ 이다.

5. $1010_{(2)}$ 보다 2 만큼 큰 수를 a, $10111_{(2)}$ 보다 1 만큼 작은 수를 b 라고 할 때, 두 수 a, b 의 합을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$1010_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 = 8 + 2 = 10$

$\therefore\ a = 12$

$10111_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$

따라서 $b = 22$

$\therefore\ a + b = 34$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B = \{1,\ a-2,\ a,\ a \times 2\}$ 이다. a 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ 이므로, a 값은 2, 4, 8 중 하나여야 한다.

이 중 $a-2$, a, $a \times 2$ 가 모두 집합 A 의 원소가 되는 a 값을 찾으면 $a = 4$ 이다.

7. 1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g 인 저울추가 한 개씩 있을 때, 그 중에서 4g, 8g, 32g 짜리 추만 사용하였다. 이 물건의 무게를 이진법으로 나타내어라.

[배점 4, 중중]

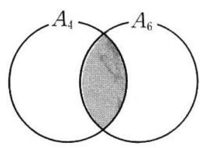
▶ 답 :

▷ 정답 : $101100_{(2)}$

해설

$1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 101100_{(2)}$

8. 자연수 n 의 배수의 집합을 A_n 으로 표현할 때, 4 의 배수의 집합은 A_4 , 6 의 배수의 집합은 A_6 이다.
아래 벤 다이어그램의 색칠한 부분은?



[배점 4, 중중]

① A_2 ② A_4 ③ A_6

④ A_{12} ⑤ A_{24}

해설

$A_4 \cap A_6$ 은 4 와 6 의 공배수이다. 따라서 4 와 6 의 최소공배수는 $2^2 \times 3 = 12$ 이다.

9. 가로, 세로의 길이가 각각 12cm, 18cm 인 직사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않게 붙여서 정사각형을 만들려고 한다. 이 종이로 만들 수 있는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 36 cm

해설

12 와 18 의 최소공배수는 36 이므로 정사각형의 한 변의 길이는 36 cm 이다.

10. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

[배점 4, 중중]

① $1000_{(2)}$ 의 약수를 구하면 $1_{(2)}$, $10_{(2)}$, $100_{(2)}$, $1000_{(2)}$ 이다.

② $111_{(2)}$ 보다 1 작은 수는 $11_{(2)}$ 이다.

③ 세 자리의 이진법으로 나타낸 수는 모두 3 개이다

④ 이진법으로 나타낸 수에는 홀수가 없다

⑤ $11100_{(2)}$ 을 2 로 나눈 나머지는 0 이다

해설

① $1000_{(2)} = 8$ 의 약수를 구하면
$1_{(2)} = 1$, $10_{(2)} = 2$, $100_{(2)} = 4, 1000_{(2)} = 8$
② $111_{(2)} = 7$ 보다 1 작은 수는 $6 = 110_{(2)}$
③ 세 자리의 이진법으로 나타낸 수는 모두
$100_{(2)}$, $101_{(2)}$, $110_{(2)}$, $111_{(2)}$ 의 4개이다.
④ 예를 들면, $1_{(2)} = 1$은 홀수이다.
⑤ $11100_{(2)} = 28$을 2로 나눈 나머지는 0이다.

11. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 12 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 A , B 에 대하여 $B - A = \{2, 7, 10, 11\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$ 일 때, 집합 $(A \cup B)^C$ 를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\varnothing$

해설

$n(U) - n(B - A) = 8$ 이고
$n(A) = 8$ 이므로 $A \cup B = U$ 이다.
$\therefore\ (A \cup B)^C = \varnothing$

12. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 12의 약수}\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 48 개

해설

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6-2^{6-2}=64-16=48$ (개)이다.

13. 두 집합 $A=\{3,\ a,\ a^2\},\ B=\{b,\ c,\ 9\}$ 에 대하여 $A\subset B,\ B\subset A$ 이고, $a,\ b,\ c$ 가 서로 다른 자연수일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 93

해설

$A\subset B,\ B\subset A$ 이므로 $A=B$

$9\in B$ 이므로 $9\in A$

$a=9$ 또는 $a^2=9$

(i) $a=9$ 일 때, $A=\{3,\ 9,\ 81\},\ B=\{b,\ c,\ 9\}$

$\therefore\ b=3,\ c=81$ 또는 $b=81,\ c=3$

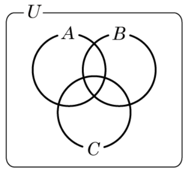
(ii) $a^2=9$ 일 때, $a=3$ (a 는 자연수)

$A=\{3,\ 3^2\}=\{3,\ 9\},\ B=\{b,\ c,\ 9\}$

b 또는 c가 3 이어야 하므로 $a,\ b,\ c$ 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=9+3+81=93$

14. 집합 A,B,C 가 전체집합 U 의 부분집합으로서 다음 그림과 같이 주어졌다. 두 집합 P,Q 에 대하여 $P\bigcirc Q$ 를 $P\bigcirc Q=(P-Q)\cup(Q-P^c)$ 와 같이 정의할 때, $A\bigcirc A$ 의 값을 구하면?



[배점 5, 중상]

① A　② B　③ C

④ $\varnothing$　⑤ $A-B$

해설

$P\bigcirc Q=(P-Q)\cup(Q-P^c)$ 이므로 $A\bigcirc A=(A-A)\cup(A-A^c)=\varnothing\cup A=A$ 이다.

15. 세 자연수 $3,\ 4,\ 5$ 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 모두 2인 자연수 중에서 가장 작은 세 자리 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 122

해설

구하는 수는 ($3,\ 4,\ 5$의 공배수) $+2$

$3,\ 4,\ 5$ 의 최소공배수는 60이고 60의 배수는 $60,\ 120,\ 180,\ \cdots$ 이다.

따라서 가장 작은 세 자리의 수는

$120+2=122$ 이다.

16. $\frac{8}{n}$, $\frac{24}{n}$, $\frac{36}{n}$ 을 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 곱하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

n 은 8, 24, 36 의 공약수, 공약수는 최대공약수의 약수이므로 8, 24, 36 의 최대공약수는 4 이다.
4 의 약수는 1, 2, 4 이다.
따라서 8 이다.

17. 가로의 길이가 72cm , 세로의 길이가 96cm , 높이가 120cm 인 직육면체를 남김없이 잘라 똑같은 크기의 정육면체로 나누려고 한다. 되도록 적은 개수의 정육면체를 만들 때, 만들 수 있는 정육면체는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 60 개

해설

72, 96, 120 의 최대공약수는 24 이므로 만들 수 있는 정육면체의 모서리의 길이는 (24의 약수)cm 이다. 정육면체의 한 모서리의 길이가 길수록 정육면체의 개수는 적으므로 한 모서리의 길이는 24(cm) 이다.
$\therefore$ (정육면체의 갯수)
$= (72 \div 24) \times (96 \div 24) \times (120 \div 24)$
$= 3 \times 4 \times 5 = 60$(개)

18. 두 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, $B = \{a,\ d\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 를 모두 구해보고 그 개수를 구하여라.

$B \subset X \subset A,\ B \neq X$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7 개

해설

집합 X 는 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 부분집합 중 a ,d 를 항상 원소로 갖는 집합이고 B 가 아니므로
$\{a,\ b,\ d\}$, $\{a,\ c,\ d\}$, $\{a,\ d,\ e\}$, $\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $\{a,\ b,\ d,\ e\}$, $\{a,\ c,\ d,\ e\}$, $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 의 7 개이다.

19. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $B = \{2,\ 4,\ 8\}$ 에 대하여 $X - A = \varnothing,\ n(X \cap B) = 1$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$X - A = \varnothing$ 이면 $X \subset A$
$n(X \cap B) = 1$ 이므로 X 는 B 의 원소 하나를 포함하고 나머지 두 원소는 포함하지 않는 A 의 부분집합이다.
X 가 2 를 포함하고 4, 8 을 포함하지 않은 경우 (집합 X의 갯수) $= 2^{5-3} = 4$(개) , X 가 4 를 포함한 경우와 8 을 포함한 경우도 마찬가지이므로 (집합 X의 갯수) $= 4 \times 3 = 12$(개) 이다.

20. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 34$, $n(A^c \cap B^c) = 11$, $n(B - (A \cap B)^c) = 6$ 일 때, $n((A \cup B) - (A \cap B))$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$n(U) = 34$ 이고 $n(A^c \cap B^c) = 11$ 이면, $n(A \cup B) = 23$,

$B - (A \cap B)^c = A \cap B$ 이므로 $n(B - (A \cap B)^c) = n(A \cap B) = 6$,

$\therefore n((A \cup B) - (A \cap B)) = 23 - 6 = 17$

21. 다음 중 서로소인 것은? [배점 5, 상하]

① $(14, 21)$ ② $(36, 72)$ ③ $(8, 90)$

④ $(11, 121)$ ⑤ $(9, 19)$

해설

서로소는 최대공약수가 1 인 두 자연수를 말하므로 $(9, 19)$ 이다.

22. 1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g 의 저울추 1 개씩과 저울로 1g 부터 63g 까지의 자연수 무게를 가진 물체를 측정할 수 있다. 만약 4g 짜리 추를 잃어버리면 잴 수 없는 무게의 종류가 몇 가지인지 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32 가지

해설

추가 모두 2 진법의 수이므로, n 개의 추로 $2^n - 1$ 개의 무게를 측정할 수 있다.

추 6 개로 잴 수 있는 무게의 수= $63g$,

추 5 개로 잴 수 있는 무게의 수= $31g$,

$\therefore$ (4g 짜리 추를 잃어버리면 잴 수 없는 무게의 종류)= 32 (가지)

23. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \{x | x < 10\}$, $B = \{x | x^2 - 1 = 3n,\ x \in A, n \in N\}$ 에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로

$A = \{x | x < 10\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,

$B = \{x | x^2 - 1 = 3n,\ x \in A, n \in N\} = \{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$,

$A \cap B^c = A - B = \{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$,

따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

24. 집합 $A = \{a, d,\ e\}$ 이고 집합 $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ 일 때, $A \cap X = \{a,\ e\}$, $c \notin X$, $X \cup B = B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 개

해설

집합B 의 부분집합 중 원소 a, e 는 포함하고, 원소 c, d 는 포함하지 않는 부분집합의 수를 구한다.
$2^{6-2-2} = 2^2 = 4$ (개)

25. $acd_{(4)} - 1 = aba_{(4)} = abc_{(4)} + 1$ 일 때, $dac_{(4)}$ 를 십진법으로 나타내어라. (단, a, b, c, d 는 서로 다른 숫자) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$acd_{(4)} - 1 = aba_{(4)} \rightarrow c - 1 = b,\ d = 0,\ a = 3$
$aba_{(4)} = abc_{(4)} + 1 \rightarrow c + 1 = 3,\ c = 2,\ b = 1$
$\therefore dac_{(4)} = 32_{(4)} = 14$