

단원 종합 평가

1. 두 집합 $A = \{11, 13\}$, $B = \{9, 11, 13, 15, 17\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8개

해설

집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 원소 11, 13을 모두 포함하는 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

2. $A \subset B$ 이고 $n(A) = 17$, $n(B) = 35$ 일 때, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$ 를 각각 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $n(A \cap B) = 17$

▷ 정답 : $n(A \cup B) = 35$

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ 이다.
 $n(A \cap B) = n(A) = 17$
 $n(A \cup B) = n(B) = 35$

3. 다음 수 중에서 세 번째로 큰 수는?

[배점 3, 중하]

① $1010_{(2)}$ 보다 2 큰 수

② 15보다 $10_{(2)}$ 작은 수

③ $2^4 + 2^3$

④ $2^2 \times 3^2$

⑤ $10101_{(2)}$

해설

① $1010_{(2)} + 2 = 10 + 2 = 12$

② $15 - 10_{(2)} = 15 - 2 = 13$

③ $2^4 + 2^3 = 16 + 8 = 24$

④ $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

⑤ $10101_{(2)} = 21$

따라서 큰 수부터 차례로 나열하면

④, ③, ⑤, ②, ①이므로 세 번째로 큰 수는 ⑤이다.

4. 전체집합 $U = \{x \mid x \leq 1000 \text{인 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2^3 \times 3 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 2 \times 3^2 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $n(A \cap B)$ 를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$2^3 \times 3$ 과 2×3^2 의 최소공배수는 $2^3 \times 3^2 = 72$ 이다.

$A \cap B$

$= \{x \mid x \text{는 } 2^3 \times 3 \text{ 과 } 2 \times 3^2 \text{의 공배수}\}$

$= \{x \mid x \text{는 } 2^3 \times 3 \text{ 과 } 2 \times 3^2 \text{의 최소공배수의 배수}\}$

$= \{x \mid x \text{는 } 72 \text{의 배수}\}$

$\therefore 1000 \div 72 = 13 \cdots 64$

따라서 $n(A \cap B) = 13$ 이다.

5. $1010_{(2)}$ 보다 2 만큼 큰 수를 a , $10111_{(2)}$ 보다 1 만큼 작은 수를 b 라고 할 때, 두 수 a, b 의 합을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$1010_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 = 8 + 2 = 10$

$\therefore a = 12$

$10111_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$

따라서 $b = 22$

$\therefore a + b = 34$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B, B \subset A$ 이고

$A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{1, a-2, a, a \times 2\}$

이다. a 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로, a 값은 2, 4, 8 중 하나여야 한다.

이 중 $a-2, a, a \times 2$ 가 모두 집합 A 의 원소가 되는 a 값을 찾으면 $a = 4$ 이다.

7. 1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g 인 저울추가 한 개씩 있을 때, 그 중에서 4g, 8g, 32g 짜리 추만 사용하였다. 이 물건의 무게를 이진법으로 나타내어라.

[배점 4, 중중]

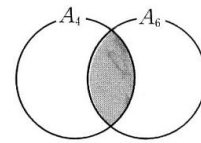
▶ 답 :

▷ 정답 : $101100_{(2)}$

해설

$1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 101100_{(2)}$

8. 자연수 n 의 배수의 집합을 A_n 으로 표현할 때, 4 의 배수의 집합은 A_4 , 6 의 배수의 집합은 A_6 이다. 아래 벤 다이어그램의 색칠한 부분은?



[배점 4, 중중]

① A_2

② A_4

③ A_6

④ A_{12}

⑤ A_{24}

해설

$A_4 \cap A_6$ 은 4 와 6 의 공배수이다. 따라서 4 와 6 의 최소공배수는 $2^2 \times 3 = 12$ 이다.

9. 가로, 세로의 길이가 각각 12cm, 18cm 인 직사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않게 붙여서 정사각형을 만들려고 한다. 이 종이를 만들 수 있는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 36 cm

해설

12와 18의 최소공배수는 36 이므로 정사각형의 한 변의 길이는 36 cm 이다.

10. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

[배점 4, 중중]

- ① $1000_{(2)}$ 의 약수를 구하면 $1_{(2)}, 10_{(2)}, 100_{(2)}, 1000_{(2)}$ 이다.
- ② $111_{(2)}$ 보다 1 작은 수는 $11_{(2)}$ 이다.
- ③ 세 자리의 이진법으로 나타낸 수는 모두 3 개이다
- ④ 이진법으로 나타낸 수에는 홀수가 없다
- ⑤ $11100_{(2)}$ 을 2로 나눈 나머지는 0 이다

해설

- ① $1000_{(2)} = 8$ 의 약수를 구하면 $1_{(2)} = 1, 10_{(2)} = 2, 100_{(2)} = 4, 1000_{(2)} = 8$
- ② $111_{(2)} = 7$ 보다 1 작은 수는 $6 = 110_{(2)}$
- ③ 세 자리의 이진법으로 나타낸 수는 모두 $100_{(2)}, 101_{(2)}, 110_{(2)}, 111_{(2)}$ 의 4개이다.
- ④ 예를 들면, $1_{(2)} = 1$ 은 홀수이다.
- ⑤ $11100_{(2)} = 28$ 을 2로 나눈 나머지는 0 이다.

11. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $B - A = \{2, 7, 10, 11\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$ 일 때, 집합 $(A \cup B)^C$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\emptyset$

해설

$n(U) - n(B - A) = 8$ 이고
 $n(A) = 8$ 이므로 $A \cup B = U$ 이다.
 $\therefore (A \cup B)^C = \emptyset$

12. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 48 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6 - 2^{6-2} = 64 - 16 = 48$ (개)이다.

13. 두 집합 $A = \{3, a, a^2\}$, $B = \{b, c, 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고, a, b, c 가 서로 다른 자연수일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

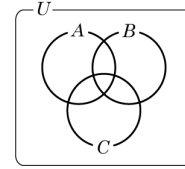
▶ 답:

▶ 정답: 93

해설

$A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$
 $9 \in B$ 이므로 $9 \in A$
 $a = 9$ 또는 $a^2 = 9$
 (i) $a = 9$ 일 때, $A = \{3, 9, 81\}$, $B = \{b, c, 9\}$
 $\therefore b = 3, c = 81$ 또는 $b = 81, c = 3$
 (ii) $a^2 = 9$ 일 때, $a = 3$ (a 는 자연수)
 $A = \{3, 3^2\} = \{3, 9\}$, $B = \{b, c, 9\}$
 b 또는 c 가 3 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.
 $\therefore a + b + c = 9 + 3 + 81 = 93$

14. 집합 A, B, C 가 전체집합 U 의 부분집합으로서 다음 그림과 같이 주어졌다. 두 집합 P, Q 에 대하여 $P \circ Q$ 를 $P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 와 같이 정의할 때, $A \circ A$ 의 값을 구하면?



[배점 5, 중상]

- ① A ② B ③ C
 ④ $\emptyset$ ⑤ $A - B$

해설

$P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 이므로 $A \circ A = (A - A) \cup (A - A^c) = \emptyset \cup A = A$ 이다.

15. 세 자연수 3, 4, 5 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 모두 2인 자연수 중에서 가장 작은 세 자리 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 122

해설

구하는 수는 (3, 4, 5의 공배수) + 2
 3, 4, 5의 최소공배수는 60이고 60의 배수는 60, 120, 180, ... 이다.
 따라서 가장 작은 세 자리의 수는 $120 + 2 = 122$ 이다.

16. $\frac{8}{n}, \frac{24}{n}, \frac{36}{n}$ 을 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 곱하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

n 은 8, 24, 36 의 공약수, 공약수는 최대공약수의 약수이므로 8, 24, 36 의 최대공약수는 4 이다.
4 의 약수는 1, 2, 4 이다.
따라서 8 이다.

17. 가로 길이가 72cm, 세로 길이가 96cm, 높이가 120cm 인 직육면체를 남김없이 잘라 똑같은 크기의 정육면체로 나누려고 한다. 되도록 적은 개수의 정육면체를 만들 때, 만들 수 있는 정육면체는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 60 개

해설

72, 96, 120 의 최대공약수는 24이므로 만들 수 있는 정육면체의 모서리의 길이는 (24의 약수)cm 이다. 정육면체의 한 모서리의 길이가 길수록 정육면체의 개수는 적으므로 한 모서리의 길이는 24(cm) 이다.
∴ (정육면체의 갯수)
= $(72 \div 24) \times (96 \div 24) \times (120 \div 24)$
= $3 \times 4 \times 5 = 60$ (개)

18. 두 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, d\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 를 모두 구해보고 그 개수를 구하여라.

$$B \subset X \subset A, B \neq X$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7 개

해설

집합 X 는 $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중 a, d 를 항상 원소로 갖는 집합이고 B 가 아니므로
 $\{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d, e\},$
 $\{a, b, c, d\}, \{a, b, d, e\},$
 $\{a, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}$ 의 7 개이다.

19. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 8\}$ 에 대하여 $X - A = \emptyset$, $n(X \cap B) = 1$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 개

해설

$X - A = \emptyset$ 이면 $X \subset A$
 $n(X \cap B) = 1$ 이므로 X 는 B 의 원소 하나를 포함하고 나머지 두 원소는 포함하지 않는 A 의 부분집합이다.
 X 가 2 를 포함하고 4, 8 을 포함하지 않은 경우 (집합 X 의 갯수) = $2^{5-3} = 4$ (개), X 가 4 를 포함한 경우와 8 을 포함한 경우도 마찬가지이므로 (집합 X 의 갯수) = $4 \times 3 = 12$ (개) 이다.

20. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$n(U) = 34$, $n(A^c \cap B^c) = 11$, $n(B - (A \cap B)^c) = 6$
일 때, $n((A \cup B) - (A \cap B))$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$n(U) = 34$ 이고 $n(A^c \cap B^c) = 11$ 이면, $n(A \cup B) = 23$,
 $B - (A \cap B)^c = A \cap B$ 이므로 $n(B - (A \cap B)^c) = n(A \cap B) = 6$,
 $\therefore n((A \cup B) - (A \cap B)) = 23 - 6 = 17$

21. 다음 중 서로소인 것은?

[배점 5, 상하]

- ① (14, 21) ② (36, 72) ③ (8, 90)
④ (11, 121) ⑤ (9, 19)

해설

서로소는 최대공약수가 1인 두 자연수를 말하므로 (9, 19)이다.

22. 1g, 2g, 4g, 8g, 16g, 32g 의 저울추 1 개씩과 저울로 1g 부터 63g 까지의 자연수 무게를 가진 물체를 측정할 수 있다. 만약 4g 짜리 추를 잃어버리면 쟈 수 없는 무게의 종류가 몇 가지인지 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32 가지

해설

추가 모두 2 진법의 수이므로, n 개의 추로 $2^n - 1$ 개의 무게를 측정할 수 있다.

추 6 개로 쟈 수 있는 무게의 수 = $63g$,

추 5 개로 쟈 수 있는 무게의 수 = $31g$,

$\therefore$ (4g 짜리 추를 잃어버리면 쟈 수 없는 무게의 종류) = 32 (가지)

23. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A =$

$\{x | x < 10\}$, $B = \{x | x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\}$
에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로
 $A = \{x | x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B = \{x | x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\} = \{2, 4, 5, 7, 8\}$,
 $A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 6, 9\}$,
따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

24. 집합 $A = \{a, d, e\}$ 이고 집합

$B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, $A \cap X = \{a, e\}$,
 $c \notin X$, $X \cup B = B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를
구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 B 의 부분집합 중 원소 a, e 는 포함하고, 원소 c, d 는 포함하지 않는 부분집합의 수를 구한다.

$$2^{6-2-2} = 2^2 = 4 \text{ (개)}$$

25. $acd_{(4)} - 1 = aba_{(4)} = abc_{(4)} + 1$ 일 때, $dac_{(4)}$ 를 십진법으로 나타내어라. (단, a, b, c, d 는 서로 다른 숫자) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$acd_{(4)} - 1 = aba_{(4)} \rightarrow c - 1 = b, d = 0, a = 3$$

$$aba_{(4)} = abc_{(4)} + 1 \rightarrow c + 1 = 3, c = 2, b = 1$$

$$\therefore dac_{(4)} = 32_{(4)} = 14$$