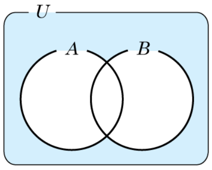
단원 종합 평가

1. 다음 벤 다이어그램에서

$n(U)=40,\ n(A)=20,\ n(B)=18,\ n(A\cap B)=5$

일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7 개

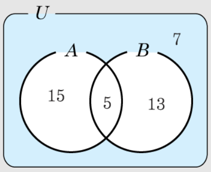
해설

색칠된 부분이 나타내는 집합은$(A\cup B)^C$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+18-5=33$

$\therefore n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)=40-33=7$

[별해]



벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 적어 보면 색칠된 부분의 원소의 개수는 7 개이다.

2. 바둑돌을 이용하여 $1010_{(2)}$ 을 ●○●○으로 나타내었다. 다음 계산 결과를 바둑돌을 이용하여 나타내어라.

$1101_{(2)}+11_{(2)}-101_{(2)}$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : ●○●●

해설

$$\begin{array}{r} 1101_{(2)} \\ +\ \ 101_{(2)} \\ \hline 10010_{(2)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10010_{(2)} \\ -\ \ 1111_{(2)} \\ \hline 11_{(2)} \end{array}$$

3. 100 이하의 자연수 중에서 6과 9의 공배수의 갯수는?

[배점 3, 중하]

① 3개 ② 4개 ③ 5개

④ 6개 ⑤ 8개

해설

6 과 9 의 최소공배수는 $2\times 3^2=18$,

따라서 100 이하에서 18 의 배수는 5개

4. $5\times a,\ 3\times a,\ 2\times a$ 의 세 자연수의 최소공배수가 330 일 때, a 가 될 수 있는 수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

$$\begin{array}{r|lll} \square & 5\times\square & 3\times\square & 2\times\square \\ \hline & 5 & 3 & \end{array}$$

$5\times 3\times 2\times a=330$

$\therefore a=11$

5. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 5 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{1,\ 6\}$,
$\{1,\ 7\}$,
$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{2,\ 7\}$,
$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 6\}$, $\{3,\ 7\}$
$\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 6\}$, $\{4,\ 7\}$
$\{5,\ 6\}$, $\{5,\ 7\}$,
$\{6,\ 7\}$
따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는
$6+5+4+3+2+1 = 21$ (개)이다.
집합 A 의 부분집합 중 원소가 5 개인 집합은 원소 2 개를 짝짓고 남은 5 개의 원소를 원소로 갖는 집합이므로 원소가 2 개인 부분집합의 개수와 같은 개수의 부분집합이 만들어진다. 즉 21 개가 된다.
$a = 21,\ b = 21$ 이므로 $a+b = 42$

6. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 두 조건을 만족시키는 집합 X 는 모두 몇 개인가?

(1) $(A \cap B) \cup X = X$ (2) $(A \cup B) \cap X = X$

[배점 4, 중중]

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개
④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

(1)과 (2)에서 $(A \cap B) \subset X$, $X \subset (A \cup B)$ 이므로
$(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
$\therefore\ \{4,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
따라서 집합 X 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합 중 원소 4, 5 를 반드시 포함하는 부분집합이다.
$\therefore$ (집합 X 의 개수) $= 2^4 = 16$ (개)

7. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 일 때, 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $\{0\} \subset A$	㉡ $\varnothing \subset A$
㉢ $0 \notin A$	㉣ $A \not\subset \{2,\ 3,\ 1\}$
㉤ $\{1\} \subset A$	㉥ $\{0,\ 1\} \not\subset A$

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ $\{0\} \not\subset A$
㉣ $A \subset \{2,\ 3,\ 1\}$

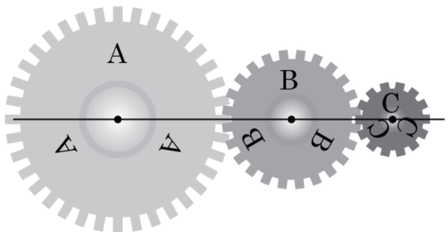
8. 다음 중 두 수가 서로소인 것은? [배점 4, 중중]

① 15 와 24 ② 8 과 15 ③ 14 와 35
④ 36 과 54 ⑤ 2 와 6

해설

① 15 와 24 의 최대공약수는 3
③ 14 와 35 의 최대공약수는 7
④ 36 과 54 의 최대공약수는 9
⑤ 2 와 6 의 최대공약수는 2

9. 다음 그림과 같이 서로 맞물려 돌아가는 세 톱니바퀴 A, B, C의 톱니의 수는 각각 36개, 24개, 14개이다. 세 톱니바퀴가 돌아 원래 모양이 되려면 톱니바퀴 A는 몇 번 회전해야 하는지 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14번

해설

세 톱니바퀴가 원래 모양이 되기까지 돌아간 톱니의 개수는 36, 24, 14의 최소공배수인 504개이므로, 톱니바퀴 A는 $504 \div 36 = 14$(번) 회전해야 한다.

10. $A = \{1,\ \{2,\ 3\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

[배점 5, 중상]

① $\{2,\ 3\} \in A$
② $\{2,\ 3\} \subset A$
③ $\{1,\ \{2,\ 3\}\} \subset A$
④ $1 \in A$
⑤ $\{2,\ 3\} \in A$

해설

② $\{2,\ 3\} \not\subset A$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
㉡ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.
㉢ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

[배점 5, 중상]

① ㉠
② ㉡
③ ㉢
④ ㉡, ㉢
⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.
㉢ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

12. 두 집합 $A = \{3,\ a,\ a^2\}$, $B = \{b,\ c,\ 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고, a, b, c 가 서로 다른 자연수일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 93

해설

$A \subset B,\ B \subset A$ 이므로 $A = B$

$9 \in B$ 이므로 $9 \in A$

$a = 9$ 또는 $a^2 = 9$

(i) $a = 9$ 일 때, $A = \{3,\ 9,\ 81\}$, $B = \{b,\ c,\ 9\}$

$\therefore\ b = 3,\ c = 81$ 또는 $b = 81,\ c = 3$

(ii) $a^2 = 9$ 일 때, $a = 3$ (a 는 자연수)

$A = \{3,\ 3^2\} = \{3,\ 9\}$, $B = \{b,\ c,\ 9\}$

b 또는 c가 3 이어야 하므로 $a,\ b,\ c$ 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a + b + c = 9 + 3 + 81 = 93$

13. 두 집합 $A = \{3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$, $B = \{x | x$는 $3 \le x \le 5$인 자연수$\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup X = X,\ (A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 8 개

해설

$B = \{3,\ 4,\ 5\}$

$(A - B) \cup X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$

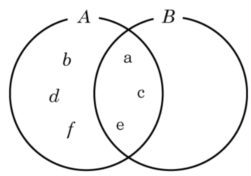
$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\{6,\ 8,\ 9,\ 11\} \subset X \subset \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$

집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 6, 8, 9, 11 을 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore\ 2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)

14. 다음 벤 다이어그램에서 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \{a, c, e\}$ 가 성립할 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 있는 것은?



[배점 5, 중상]

① $\{a, b, c, d, e\}$　　② $\{a, c, d, e, g\}$

③ $\{b, d, e, f, g\}$　　④ $\{a, c, d, e, g\}$

⑤ $\{a, c, e, g, h\}$

해설

집합 B 는 반드시 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 을 포함하여야 한다.

그러나 A 집합에만 존재하는 원소 b, d, f 는 들어갈 수 없다.

① b, d 가 포함되어서 옳지 않다.

② d 가 포함되어서 옳지 않다.

③ b, d, f 가 포함되어서 옳지 않다.

④ d 가 포함되어서 옳지 않다.

15. 다음 네 수 $2^a \times 3^5 \times 7 \times 175$, $2^5 \times 3^b \times 5^3 \times 7^2$, $2^6 \times 3^3 \times 5^c \times 7^3$, $144 \times 75 \times 7^d$ 의 최대공약수가 $2^2 \times 7 \times 90$ 일 때, $(a + b + c) \times d$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

최대공약수가 $2^2 \times 7 \times 90 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 이고
주어진 각 수를 정리한 값이
$2^a \times 3^5 \times 7 \times 175 = 2^a \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2$
$2^5 \times 3^b \times 5^3 \times 7^2$
$2^6 \times 3^3 \times 5^c \times 7^3$
$144 \times 75 \times 7^d = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^d$ 이다.
주어진 네 수의 2 의 지수를 비교하면
모두 3 보다 크므로 a 는 3 이어야 한다.
주어진 네 수의 3 의 지수를 비교하면
모두 2 보다 크므로 b 는 2 이어야 한다.
주어진 네 수의 5 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 c 는 1 이어야 한다.
주어진 네 수의 7 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 d 는 1 이어야 한다.
따라서 $a = 3,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 1$ 이므로
$(a+b+c) \times d = (3+2+1) \times 1 = 6$ 이다.

16. 집합 $S = \{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것만 골라라.

㉠ $\{a\} \subset S$

㉡ $\{b\} \in S$

㉢ $\{b,\ c,\ d\} \in S$

㉣ $c \in S,\ d \in S$

㉤ $\{c,\ d\} \subset S$

㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\}$

[배점 5, 상하]

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진 집합이다. 따라서 집합 S 의 원소는
$\{a,\ \{a\},\ \{a,\ b\},\ b,\ \{c\},\ c,\ d\}$ 가 된다.
㉠ $\{a\} \subset S$ $\rightarrow$ $\{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉡ $\{b\} \in S$ $\rightarrow$ b 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$ 는 집합 S 의 원소가 아니다.
㉢ $\{b,c,d\} \in S$ $\rightarrow$ b,c,d 는 모두 집합 S 의 원소이므로 $\{b,c,d\} \subset S$ 가 되어야 한다.
㉣ $c \in S, d \in S$ $\rightarrow$ c,d 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.
㉤ $\{c,d\} \subset S$ $\rightarrow$ c,d 는 집합 S 의 원소이고 $\{c,d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.
㉥ $S \subset \{a,\ b,\ c,\ d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a,b,c,d\}$ 의 부분집합이 될 수 없다.
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

17. 집합 P 에 대하여 $[A] = \{P | P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{x,y,z\}$ 일 때, 집합 $[A]$ 를 원소나열법으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $[A] = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{z,x\},$
$\{\{x,y,z\}$

해설

$[A] = \{P | P \subset A\}$ 라는 정의를 살펴보면 P 는 집합 A 의 부분집합이다.
따라서 $[A]$ 는 집합 A 의 부분집합들을 원소로 가진다.
$\therefore [A] = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{z,x\},$
$\{x,y,z\}\}$

18. 다음 중 무한집합이 아닌 것을 모두 고르면 ? (정답 3 개) [배점 5, 상하]

① $\{x|x$는 짝수인 소수$\}$

② $\{x|x$는 1과 2사이의 유리수$\}$

③ $\left\{x|x\text{는 } \frac{4}{3x}=k,\ k\text{는 자연수}\right\}$

④ $\{2x+1|x,\ x$는 11보다 큰 소수$\}$

⑤ $\{[x]|1.5 \le x \le 3.5,\ x$는 유리수$\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

해설

① $\{x|x$는 짝수인 소수$\}$ → 짝수인 소수는 2 뿐이다.
② $\{x|x$는 1과 2사이의 유리수$\}$ → 1 과 2 사이의 유리수는 무수히 많다.
③ $\left\{x|x\text{는 } \frac{4}{3x}=k,\ k\text{는 자연수}\right\}$ → $\frac{4}{3x}$ 가 자연수가 되는 x 의 값은 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$
④ $\{2x+1|x,\ x$는 11보다 큰 소수$\}$ → 11 보다 큰 소수는 무수히 많다.
⑤ $\{[x]|1.5 \le x \le 3.5,\ x$는 유리수$\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)
→ $[x]$ 가 될 수 있는 수는 $1, 2, 3$ 뿐이다.

19. 세 자연수 18 , 45 , x 의 최대공약수가 9 , 최소공배수가 270 일 때, x 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 54

▷ 정답 : 135

▷ 정답 : 270

해설

270 의 약수는 $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270$ 이다.
이 수 중 $18, 45$ 과 최대공약수가 9 , 최소공배수가 270 을 만족하는 수를 찾으면
$x = 27, 54, 135, 270$

20. 집합 $A = \left\{x \,\middle|\, \frac{x}{100}\text{는 기약분수, } x\text{는 100 이하의 자연수}\right\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 갯수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 40 개

해설

$100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로 1에서 100까지의 자연수 중 2, 5의배수를 제외한 수를 구하면된다. 2의 배수는 50 개, 5의 배수는 20 개, 10의 배수는 10 개 이므로
A 의 원소의 갯수는
$100 - (50 + 20 - 10) = 40($ 개$)$ 이다.

21. 두 자연수 $a,\ b$ 의 합은 216 이고 최대공약수는 18 이다. 이 때 ab 의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11664

해설

$a = 18 \times n,\ b = 18 \times m$ 이라 둘 수 있다.
$a + b = 18 \times (n + m) = 216$
$\to n + m = 12$
따라서 $(n,\ m)$ 이 될 수 있는 순서쌍은 $(1,11), (2,10),$ $(3,9), (4,8),$ $(5,7), (6,6),$ $(7,5), (8,4),$ $(9,3), (10,2),$ $(11,1)$ 이다.
그런데 $ab = 18 \times 18 \times n \times m$ 이므로 ab 가 최댓값은 $n = m = 6$ 일 때이다.
$\therefore ab$ 의 최댓값$= 11664$

22. 전체집합 $U = \{1,3,5,7,9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1,9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

$A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C$
$= A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B)$
$= (A \cap B) = \{1\}$
$A = \{1,9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1,3,5,7,9\}$ 을 만족하는
집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로
집합 B 의 개수는 $2^3 = 8$(개)

23. 숫자 0 과 1 을 다음과 같은 규칙으로 나열하였다. $100111000011111000000111111 \cdots$ 왼쪽에서부터 101 번째 숫자부터 106 번째 숫자로 2 진수를 만들 때, 그 수를 십진수로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$100111000011111000000111111 \cdots$ 는
$1, 00, 111, 0000, 11111, 000000, 1111111, \cdots$ 의 묶음으로 나눌 수 있다.
각 묶음이 1 씩 커진다.
1 부터 13 까지의 합$= \dfrac{13 \times 14}{2} = 91$ 이므로,
92 번째 수부터 105 번째 수까지 14 개의 수가 연속으로 0 이 된다.
106 번째 수는 1 이다. 따라서 만들 수 있는 이진수는 $1_{(2)}$ 이고, 십진수로 나타내어도 1 이다.

24. 120^9 은 2800 개의 서로 다른 약수를 가지고 있다. 이 약수 중 제곱수는 몇 개인지 구하여라.
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 350 개

해설

120 을 소인수분해하면 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로
$120^9 = (2^3 \times 3 \times 5)^9 = 2^{27} \times 3^9 \times 5^9$ 이다. 따라서
120^9 의 약수의 개수는 $(27+1) \times (9+1) \times (9+1) = 2800$ 개이고,
이 중 제곱수는 지수가 모두 짝수로 이루어져 있어야 한다.
따라서 제곱수는 $2^0, 2^2, \cdots, 2^{26}$ 인 14 개, $3^0, 3^2, \cdots, 3^8$ 인 5 개, $5^0, 5^2, \cdots, 5^8$ 인 5개이므로
120^9 의 약수 중 제곱수는 $14 \times 5 \times 5 = 350$ 이다.

25. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때, $[[\dfrac{[p,p]}{[p,q]}, q]$, $[\dfrac{[q,q]}{[p,q]}, p]]$ 를 간단히 하여라.
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$[[\frac{[p,p]}{[p,q]},q],[\frac{[q,q]}{[p,q]},p]]$

$=[[\frac{p}{[p,q]},q],[\frac{q}{[p,q]},p]]$

$=[[\frac{p}{[p,q]},q],[\frac{q}{[p,q]},p]]$ ($\frac{p}{[p,q]},q$는 서로소)

$=[1,\ 1]$

$=1$