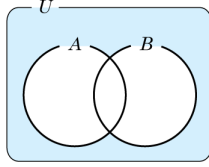


단원 종합 평가

1. 다음 벤 다이어그램에서

$n(U) = 40$, $n(A) = 20$, $n(B) = 18$, $n(A \cap B) = 5$
일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를
구하여라.



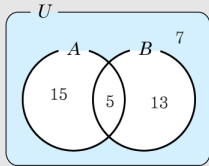
[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 7개

해설

색칠된 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^C$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 18 - 5 = 33$
 $\therefore n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 33 = 7$
[별해]



벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를
적어 보면 색칠된 부분의 원소의 개수는 7개이다.

2. 바둑돌을 이용하여 $1010_{(2)}$ 을 ●○●○으로
나타내었다. 다음 계산 결과를 바둑돌을 이용하여
나타내어라.

$$1101_{(2)} + 11_{(2)} - 101_{(2)}$$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: ●○●●

해설

$$\begin{array}{r} 1101_{(2)} \\ + 101_{(2)} \\ \hline 10010_{(2)} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10010_{(2)} \\ - 1111_{(2)} \\ \hline 11_{(2)} \end{array}$$

3. 100 이하의 자연수 중에서 6과 9의 공배수의 갯수는?

[배점 3, 중하]

① 3개 ② 4개 ③ 5개

④ 6개 ⑤ 8개

해설

6과 9의 최소공배수는 $2 \times 3^2 = 18$,
따라서 100 이하에서 18의 배수는 5개

4. $5 \times a$, $3 \times a$, $2 \times a$ 의 세 자연수의 최소공배수가 330
일 때, a 가 될 수 있는 수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: $a = 11$

해설

$$\begin{array}{r} \square \mid 5 \times \square \quad 3 \times \square \quad 2 \times \square \\ \hline 5 \quad 3 \\ 5 \times 3 \times 2 \times a = 330 \\ \therefore a = 11 \end{array}$$

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 a 개이고, 원소가 5 개인 집합은 b 개이다. 이때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 42

해설

집합 A 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은
 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\},$
 $\{1, 7\},$
 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\},$
 $\{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}$
 $\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}$
 $\{5, 6\}, \{5, 7\},$
 $\{6, 7\}$

따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는
 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ (개)이다.

집합 A 의 부분집합 중 원소가 5 개인 집합은 원소 2 개를 짝짓고 남은 5 개의 원소를 원소로 갖는 집합이므로 원소가 2 개인 부분집합의 개수와 같은 개수의 부분집합이 만들어진다. 즉 21 개가 된다.
 $a = 21, b = 21$ 이므로 $a + b = 42$

6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6\}$ 일 때, 다음 두 조건을 만족시키는 집합 X 는 모두 몇 개인가?

- (1) $(A \cap B) \cup X = X$
(2) $(A \cup B) \cap X = X$

[배점 4, 중중]

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개
④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

(1) 과 (2) 에서 $(A \cap B) \subset X, X \subset (A \cup B)$ 이므로
 $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

$\therefore \{4, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소 4, 5 를 반드시 포함하는 부분집합이다.

$\therefore$ (집합 X 의 개수) $= 2^4 = 16$ (개)

7. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 다음 보기 중 옳지 않은 것을 모두 골라라.

보기

- ㉠ $\{0\} \subset A$ ㉡ $\emptyset \subset A$
㉢ $0 \notin A$ ㉣ $A \not\subset \{2, 3, 1\}$
㉤ $\{1\} \subset A$ ㉥ $\{0, 1\} \not\subset A$

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉢

해설

㉠ $\{0\} \not\subset A$

㉢ $A \subset \{2, 3, 1\}$

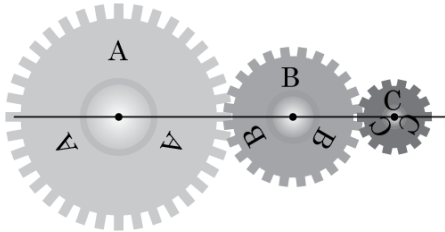
8. 다음 중 두 수가 서로소인 것은? [배점 4, 중중]

- ① 15 와 24 ② 8 과 15 ③ 14 와 35
④ 36 과 54 ⑤ 2 와 6

해설

- ① 15 와 24 의 최대공약수는 3
- ③ 14 와 35 의 최대공약수는 7
- ④ 36 과 54 의 최대공약수는 9
- ⑤ 2 와 6 의 최대공약수는 2

9. 다음 그림과 같이 서로 맞물려 돌아가는 세 톱니바퀴 A, B, C의 톱니의 수는 각각 36 개, 24 개, 14 개이다. 세 톱니바퀴가 돌아 원래 모양이 되려면 톱니바퀴 A 는 몇 번 회전해야 하는지 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 14 번

해설

세 톱니바퀴가 원래 모양이 되기까지 돌아간 톱니의 개수는 36, 24, 14 의 최소공배수인 504 개이므로, 톱니바퀴 A 는 $504 \div 36 = 14$ (번) 회전해야 한다.

10. $A = \{1, \{2, 3\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

[배점 5, 중상]

- ① $\{2, 3\} \in A$
- ② $\{2, 3\} \subset A$
- ③ $\{1, \{2, 3\}\} \subset A$
- ④ $1 \in A$
- ⑤ $\{2, 3\} \in A$

해설

- ② $\{2, 3\} \notin A$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
- ㉡ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.
- ㉢ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

[배점 5, 중상]

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.
- ㉢ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

12. 두 집합 $A = \{3, a, a^2\}$, $B = \{b, c, 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고, a, b, c 가 서로 다른 자연수일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 93

해설

$A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$

$9 \in B$ 이므로 $9 \in A$

$a = 9$ 또는 $a^2 = 9$

(i) $a = 9$ 일 때, $A = \{3, 9, 81\}, B = \{b, c, 9\}$

$\therefore b = 3, c = 81$ 또는 $b = 81, c = 3$

(ii) $a^2 = 9$ 일 때, $a = 3$ (a 는 자연수)

$A = \{3, 3^2\} = \{3, 9\}, B = \{b, c, 9\}$

b 또는 c 가 3 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore a + b + c = 9 + 3 + 81 = 93$

13. 두 집합 $A = \{3, 6, 8, 9, 11\}, B = \{x|x \text{는 } 3 \leq x \leq 5 \text{인 자연수}\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup X = X, (A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 8개

해설

$B = \{3, 4, 5\}$

$(A - B) \cup X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$

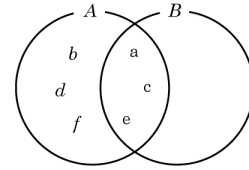
$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\{6, 8, 9, 11\} \subset X \subset \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 11\}$

집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 6, 8, 9, 11 을 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore 2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)

14. 다음 벤 다이어그램에서 $A = \{a, b, c, d, e, f\}, A \cap B = \{a, c, e\}$ 가 성립할 때, 다음 중 집합 B 가 될 수 있는 것은?



[배점 5, 중상]

- ① $\{a, b, c, d, e\}$ ② $\{a, c, d, e, g\}$
 ③ $\{b, d, e, f, g\}$ ④ $\{a, c, d, e, g\}$
 ⑤ $\{a, c, e, g, h\}$

해설

집합 B 는 반드시 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 을 포함하여야 한다.

그러나 A 집합에만 존재하는 원소 b, d, f 는 들어갈 수 없다.

- ① b, d 가 포함되어서 옳지 않다.
 ② d 가 포함되어서 옳지 않다.
 ③ b, d, f 가 포함되어서 옳지 않다.
 ④ d 가 포함되어서 옳지 않다.

15. 다음 네 수 $2^a \times 3^5 \times 7 \times 175, 2^5 \times 3^b \times 5^3 \times 7^2, 2^6 \times 3^3 \times 5^c \times 7^3, 144 \times 75 \times 7^d$ 의 최대공약수가 $2^2 \times 7 \times 90$ 일 때, $(a + b + c) \times d$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 6

해설

최대공약수가 $2^2 \times 7 \times 90 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 이고
주어진 각 수를 정리한 값이

$$2^a \times 3^5 \times 7 \times 175 = 2^a \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2$$

$$2^5 \times 3^b \times 5^3 \times 7^2$$

$$2^6 \times 3^3 \times 5^c \times 7^3$$

$$144 \times 75 \times 7^d = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^d \text{ 이다.}$$

주어진 네 수의 2 의 지수를 비교하면

모두 3 보다 크므로 a 는 3 이어야 한다.

주어진 네 수의 3 의 지수를 비교하면

모두 2 보다 크므로 b 는 2 이어야 한다.

주어진 네 수의 5 의 지수를 비교하면

모두 1 보다 크므로 c 는 1 이어야 한다.

주어진 네 수의 7 의 지수를 비교하면

모두 1 보다 크므로 d 는 1 이어야 한다.

따라서 $a = 3, b = 2, c = 1, d = 1$ 이므로

$$(a + b + c) \times d = (3 + 2 + 1) \times 1 = 6 \text{ 이다.}$$

해설

집합 S 는 집합 안에 또 다른 집합을 원소로 가진
집합이다. 따라서 집합 S 의 원소는

$\{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 가 된다.

㉠ $\{a\} \subset S \rightarrow \{a\}$ 는 집합 S 의 원소이므로
옳다.

㉡ $\{b\} \in S \rightarrow b$ 는 집합 S 의 원소이지만 $\{b\}$
는 집합 S 의 원소가 아니다.

㉢ $\{b, c, d\} \in S \rightarrow b, c, d$ 는 모두 집합 S 의
원소이므로 $\{b, c, d\} \subset S$ 가 되어야 한다.

㉣ $c \in S, d \in S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이므로
옳다.

㉤ $\{c, d\} \subset S \rightarrow c, d$ 는 집합 S 의 원소이고
 $\{c, d\}$ 는 집합 S 의 부분집합이 되므로 옳다.

㉥ $S \subset \{a, b, c, d\} \rightarrow$ 집합 S 는 $\{a, b, c, d\}$ 의
부분집합이 될 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉣, ㉤이다.

16. 집합 $S = \{a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{c\}, c, d\}$ 일 때,
다음 중 옳은 것만 골라라.

㉠ $\{a\} \subset S$

㉡ $\{b\} \in S$

㉢ $\{b, c, d\} \in S$

㉣ $c \in S, d \in S$

㉤ $\{c, d\} \subset S$

㉥ $S \subset \{a, b, c, d\}$

[배점 5, 상하]

17. 집합 P 에 대하여 $[A] = \{P | P \subset A\}$ 로 정의한다.

$A = \{x, y, z\}$ 일 때, 집합 $[A]$ 를 원소나열법으로

나타내어라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $[A] = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\},$
 $\{\{x, y, z\}\}$

해설

$[A] = \{P | P \subset A\}$ 라는 정의를 살펴보면 P 는 집
합 A 의 부분집합이다.

따라서 $[A]$ 는 집합 A 의 부분집합들을 원소로 가
진다.

$$\therefore [A] = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\},$$

 $\{x, y, z\}\}$

18. 다음 중 무한집합이 아닌 것을 모두 고르면 ? (정답 3개) [배점 5, 상하]

- ① $\{x|x \text{는 짝수인 소수}\}$
 ② $\{x|x \text{는 1과 2사이의 유리수}\}$
 ③ $\left\{x|x \text{는 } \frac{4}{3x} = k, k \text{는 자연수}\right\}$
 ④ $\{2x+1|x, x \text{는 11보다 큰 소수}\}$
 ⑤ $\{[x]|1.5 \leq x \leq 3.5, x \text{는 유리수}\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

해설

- ① $\{x|x \text{는 짝수인 소수}\} \rightarrow$ 짝수인 소수는 2 뿐이다.
 ② $\{x|x \text{는 1과 2사이의 유리수}\} \rightarrow$ 1 과 2 사이의 유리수는 무수히 많다.
 ③ $\left\{x|x \text{는 } \frac{4}{3x} = k, k \text{는 자연수}\right\} \rightarrow \frac{4}{3x}$ 가 자연수가 되는 x 의 값은 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$
 ④ $\{2x+1|x, x \text{는 11보다 큰 소수}\} \rightarrow$ 11 보다 큰 소수는 무수히 많다.
 ⑤ $\{[x]|1.5 \leq x \leq 3.5, x \text{는 유리수}\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)
 $\rightarrow [x]$ 가 될 수 있는 수는 1, 2, 3 뿐이다.

19. 세 자연수 18, 45, x 의 최대공약수가 9, 최소공배수가 270 일 때, x 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 27

▷ 정답: 54

▷ 정답: 135

▷ 정답: 270

해설

270 의 약수는 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 27, 30, 45, 54, 90, 135, 270 이다.

이 수 중 18, 45 과 최대공약수가 9, 최소공배수가 270 을 만족하는 수를 찾으면

$$x = 27, 54, 135, 270$$

20. 집합 $A = \left\{x \mid \frac{x}{100} \text{는 기약분수}, x \text{는 100 이하의 자연수}\right\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 갯수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 40 개

해설

$100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로 1에서 100까지의 자연수 중 2, 5의 배수를 제외한 수를 구하면된다. 2의 배수는 50 개, 5의 배수는 20 개, 10의 배수는 10 개 이므로

A 의 원소의 갯수는

$$100 - (50 + 20 - 10) = 40(\text{개}) \text{이다.}$$

21. 두 자연수 a, b 의 합은 216 이고 최대공약수는 18 이다. 이 때 ab 의 최댓값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 11664

해설

$a = 18 \times n$, $b = 18 \times m$ 이라 둘 수 있다.

$$a + b = 18 \times (n + m) = 216$$

$$\rightarrow n + m = 12$$

따라서 (n, m) 이 될 수 있는 순서쌍은 $(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4), (9, 3), (10, 2), (11, 1)$ 이다.

그런데 $ab = 18 \times 18 \times n \times m$ 이므로 ab 가 최댓값은 $n = m = 6$ 일 때이다.

$$\therefore ab \text{의 최댓값} = 11664$$

해설

1001110000111110000001111111... 는

1, 00, 111, 0000, 11111, 000000, 1111111, ... 의 묶음으로 나눌 수 있다.

각 묶음이 1 씩 커진다.

$$1 \text{ 부터 } 13 \text{ 까지의 합} = \frac{13 \times 14}{2} = 91 \text{ 이므로,}$$

92 번째 수부터 105 번째 수까지 14 개의 수가 연속으로 0 이 된다.

106 번째 수는 1 이다. 따라서 만들 수 있는 이진수는 $1_{(2)}$ 이고, 십진수로 나타내어도 1 이다.

22. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

24. 120^9 은 2800 개의 서로 다른 약수를 가지고 있다. 이 약수 중 제곱수는 몇 개인지 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 350 개

해설

$$\begin{aligned} A - (A - B) &= A \cap (A \cap B^C)^C \\ &= A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

$$= (A \cap B) = \{1\}$$

$A = \{1, 9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 을 만족하는

집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로

$$\text{집합 } B \text{ 의 개수는 } 2^3 = 8(\text{개})$$

해설

120 을 소인수분해하면 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로

$$120^9 = (2^3 \times 3 \times 5)^9 = 2^{27} \times 3^9 \times 5^9 \text{ 이다. 따라서}$$

120^9 의 약수의 개수는 $(27+1) \times (9+1) \times (9+1) = 2800$ 개이고,

이 중 제곱수는 지수가 모두 짝수로 이루어져 있어야 한다.

따라서 제곱수는 $2^0, 2^2, \dots, 2^{26}$ 인 14 개,

$3^0, 3^2, \dots, 3^8$ 인 5 개, $5^0, 5^2, \dots, 5^8$ 인 5개이므로

$$120^9 \text{ 의 약수 중 제곱수는 } 14 \times 5 \times 5 = 350 \text{ 이다.}$$

23. 숫자 0 과 1 을 다음과 같은 규칙으로 나열하였다.

1001110000111110000001111111... 왼쪽에서부터

101 번째 숫자부터 106 번째 숫자로 2 진수를 만들

때, 그 수를 십진수로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

25. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때,

$$\left[\left[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q \right], \left[\frac{[q, q]}{[p, q]}, p \right] \right] \text{ 를 간단히 하여라.}$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & [[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]] \\ &= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \\ &= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \quad (\frac{p}{[p, q]}, q \text{는 서로소}) \\ &= [1, 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$