

단원 종합 평가

1. 집합 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 일 때, a, e 를 반드시 원소로 가지는 A 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32 개

해설

A 의 부분집합 중 원소 a, e 를 포함한 것이므로 $\{b, c, d, f, g\}$ 의 부분집합에 a, e 를 첨가한 것과 같다.

따라서 $\{b, c, d, f, g\}$ 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이다.

2. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2) 48 \\ 2) 24 \\ 2) 12 \\ 2) 6 \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

3. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

㉠ $5^2 = 25$

㉡ $3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 3^2 \times 5^2 \times 7$

㉢ $2^4 = 4^3$

㉣ $\frac{1}{5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{5^2 \times 7^3}$

㉤ $\frac{1}{5^3 \times 5^4} = \frac{1}{5^{12}}$

[배점 3, 중하]

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉤

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉢, ㉤

해설

㉢ $2^4 \neq 4^3$

㉤ $\frac{1}{5^3 \times 5^4} = \frac{1}{5^7}$

4. 세 자연수 72, A , 84 의 최대공약수가 6 일 때, 다음 중 A 의 값이 될 수 없는 것은? [배점 3, 중하]

① 6

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 42

해설

6) $\begin{array}{r} 72 \quad A \quad 84 \\ 12 \quad a \quad 14 \end{array}$

$A = 6 \times a$ (단, a 는 1 또는 소수이다.)

① $6 = 6 \times 1(\bigcirc)$

② $18 = 6 \times 3(\bigcirc)$

③ $24 = 6 \times 4(\times)$

④ $30 = 6 \times 5(\bigcirc)$

⑤ $42 = 6 \times 7(\bigcirc)$

5. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3, \{0, 1\}, \emptyset\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]

- ① $\emptyset \in A$ ② $\{0, 1\} \in A$
 ③ $\{0, 3\} \subset A$ ④ $\{0\} \in A$
 ⑤ $\emptyset \subset A$

해설

$\{0\} \subset A$

6. 가로 길이가 1200cm, 세로 길이가 $2^3 \times 3^2 \times 5$ cm 인 벽면이 있다. 이 벽면에 가능한 한 큰 정사각형의 타일을 붙이려고 한다. 정사각형의 타일은 몇 개 필요한지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 30 개

해설

$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$, $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 최대공약수는 $2^3 \times 3 \times 5 = 120$
 따라서 정사각형의 타일의 한 변의 길이가 120cm 이므로 필요한 타일의 개수는 $(1200 \div 120) \times (360 \div 120) = 10 \times 3 = 30$ (개) 이다.

7. $2^a = 32$, $5^b = 625$ 를 만족하는 자연수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 20

해설

$2^5 = 32$, $5^4 = 625$ 이므로 $a \times b = 20$ 이다.

8. 세 수 $2 \times 3^2 \times 5$, $2^2 \times 3 \times 7$, $2^3 \times 5 \times 7$ 의 최소공배수는? [배점 4, 중중]

- ① $2^3 \times 5^2 \times 7$ ② $2 \times 3 \times 5^2$
 ③ $2^3 \times 3^2 \times 5$ ④ $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$
 ⑤ $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

해설

$2 \times 3^2 \times 5$, $2^2 \times 3 \times 7$, $2^3 \times 5 \times 7$
 최소공배수: $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$

9. 1 에서 100 까지의 자연수 중에서 6 과 서로소인 자연수의 개수는? [배점 4, 중중]

- ① 17 개 ② 33 개 ③ 50 개
 ④ 67 개 ⑤ 84 개

해설

$6 = 2 \times 3$ 이므로 6 과 서로소인 수는 2 의 배수도 3 의 배수도 아닌 수이다.
 100 이하의 자연수 중 2 의 배수는 50 개, 3 의 배수는 33 개, 6 의 배수는 16 개이므로
 2 또는 3 의 배수의 개수는 $50 + 33 - 16 = 67$ (개)
 따라서 6 과 서로소인 수는 $100 - 67 = 33$ (개) 이다.

10. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 13 \text{보다 작은 홀수}\}$ 의 1, 3 을 반드시 포함하고 9 는 포함하지 않는 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 것은 몇 개인지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 3개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 에서 원소 1, 3, 9 를 제외한 $\{5, 7, 11\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 것은 $\{5, 7\}, \{7, 11\}, \{5, 11\}$ 의 3 개이므로, 1, 3 을 반드시 포함하고 9 는 포함하지 않는 A 의 부분집합은 $\{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 7, 11\}, \{1, 3, 5, 11\}$ 이다.

11. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$, $C = \{x \mid x = 2 \times n + 1, n = 0, 1\}$ 에 대하여 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

[배점 5, 중상]

- ① $C \subset A \subset B$ ② $A \subset B \subset C$
 ③ $B \subset A \subset C$ ④ $C \subset B \subset A$
 ⑤ $A \subset C \subset B$

해설

$B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 3\}$ 따라서 $C \subset B \subset A$ 의 포함 관계가 성립한다.

12. 집합 $A = \{0, 2, \{4\}, \{6, 8\}, \emptyset\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?.

[배점 5, 중상]

- ① $\emptyset \in A$ ② $\{0, 2, \{4\}\} \subset A$
 ③ $n(A) = 5$ ④ $\{4\} \subset A$
 ⑤ $\{6, 8\} \in A$

해설

- ④ $\{4\} \in A$

13. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

[배점 5, 중상]

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$
 ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 분수}\}$
 ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수인 짝수}\}$
 ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

- ① $A = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 100\}$ 이므로 유한 집합이다.
 ② $B = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{보다 작은 분수}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ 이므로 무한집합이다.
 ③ $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수인 짝수}\} = \{6, 12, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.
 ④ $D = \{x \mid x \text{는 } 2 \times n, n \text{은 } 10 \text{보다 작은 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 18\}$ 이므로 유한집합이다.
 ⑤ $E = \left\{x \mid x \text{는 } \frac{100}{x} \text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1, 2, 4, 5, 20, 25, 50, 100\}$ 이므로 유한집합이다.

14. 서로 맞물려 도는 톱니바퀴 ㉠과 ㉡이 있다. ㉠의 톱니 수는 20, ㉡의 톱니 수는 15일 때, 이 톱니가 같은 이에서 다섯 번째로 다시 맞물리는 것은 ㉡이 몇 바퀴 돈 후인가? [배점 5, 중상]

- ① 16 바퀴 ② 18 바퀴 ③ 20 바퀴
 ④ 21 바퀴 ⑤ 24 바퀴

해설

20 와 15 의 최소공배수는 60 이다.
 같은 지점에 첫번째로 맞물릴 때까지 ㉠ 톱니바퀴는 $60 \div 20 = 3$ (바퀴) 회전하므로
 다섯번째로 맞물릴때까지 바퀴 수는 $4 \times 3 = 12$ (바퀴) 이다.

15. $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10 = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7$ 이 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times \\ & \quad (3 \times 3) \times (2 \times 5) \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \text{ 이므로} \\ & a + b + c = 8 + 4 + 2 = 14 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

16. 집합 $A_n = \{x \mid x \text{는 } n \text{의 약수, } n \text{은 자연수}\}$ 일 때, $(A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = A_6$ 을 만족하는 n 의 값을 모두 찾아라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

▶ 정답 : 2

▶ 정답 : 3

▶ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned} & (A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = (A_n^c \cap A_6) \cup A_n = (A_6 - A_n) \cup A_n \\ & \text{위의 식을 보면,} \\ & A_n \subset A_6 \text{ 이므로,} \\ & 6 \text{ 의 약수의 집합에 포함될 수 있는 약수의 집합은} \\ & 1, 2, 3, 6 \end{aligned}$$

17. $n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$n(\{0, \emptyset, \{0, 2\}, \{1\}\}) \times n(\{0, 1\}) - n(\emptyset) = 4 \times 2 - 0 = 8$$

18. 집합 P 에 대하여 $2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다.
 $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
 [배점 5, 상하]

- ① $\emptyset \in 2^A$ ② $\emptyset \subset 2^A$ ③ $\{\emptyset\} \in 2^A$
 ④ $\{\emptyset\} \subset 2^A$ ⑤ $A \in 2^A$

해설

$2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합의 집합을 의미한다. 집합 A 의 부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$ 이다.

따라서 2^A 를 원소나열법으로 나타내면 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 이다.

③ $\{\emptyset\} \notin 2^A$

19. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2} \times x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$$\begin{aligned} & \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \\ & \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\} = \\ & , \\ & a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{9}{4}, a_5 = \frac{81}{16} \text{ 이다.} \\ & \therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16} \end{aligned}$$

20. 두 집합

$A = \{4, 3a, \frac{3}{a} + 1\}$, $B = \{a, a + 1, 4a - 3\}$ 에 대하여 $A - B = \{2\}$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A - B = \{2\}$ 이므로 2는 A 의 원소이다.

(i) $3a = 2$ 이면 $a = \frac{2}{3}$

$A = \{\frac{11}{9}, 2, 4\}, B = \{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\}$

$A - B = A$ 이므로 문제의 조건과 맞지 않는다.

(ii) $\frac{a}{3} + 1 = 2$ 이면 $a = 3$

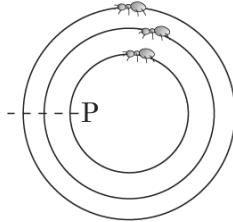
$A = \{2, 4, 9\}, B = \{3, 4, 9\}$

$A - B = \{2\}$ 이므로 문제의 조건에 적합

$\therefore a = 3$

21. 개미 3 마리가 불펜으로 그어

놓은 원을 따라 각각의 원주
위를 일정한 속력으로 돌고
있다. 12분 동안 A 개미는 20
바퀴를 돌고, B 개미는 30바퀴,
C 개미는 36바퀴를 돈다. 세
개미가 동시에 P 지점에서 출발하여 50분 동안
일정한 속도로 돌아왔다면 동시에 P 지점을 몇 번
통과하는지 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8번

해설

A, B, C 세 개미가 한 바퀴를 도는 데 걸리는 시
간은 $\frac{12}{20}$ 분, $\frac{12}{30}$ 분, $\frac{12}{36}$ 분이다.

$\frac{12}{20}$ 분 = 36초, $\frac{12}{30}$ 분 = 24초, $\frac{12}{36}$ 분 = 20초이다.

36, 24, 20의 최소공배수는 360이므로

360초 = 6분 마다 한 번씩 P 지점을 통과한다.

따라서 $50 \div 6 = 8 \dots 2$ 이므로 8번 통과한다.

22. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에
대하여 $A = \{1, 9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는
집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 8개

해설

$$\begin{aligned} A - (A - B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

$$= (A \cap B) = \{1\}$$

$A = \{1, 9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
을 만족하는

집합 B 는 원소 1을 반드시 포함하고 원소 9를
반드시 포함하지 않으므로

집합 B 의 개수는 $2^3 = 8(\text{개})$

23. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 가

$(A \cup B)^c = A \cap B^c = \emptyset$ 일 때, 다음 중 항상 옳은
것은? [배점 6, 상중]

① B 는 무한집합이다.

② B 는 무한집합이다.

③ A 가 무한집합이면 B 는 유한집합이다.

④ A 가 유한집합이면 B 는 유한집합이다.

⑤ A, B 모두 무한집합이 아니다.

해설

① A 가 유한집합이면, $(A \cup B)^c = \emptyset$ 가 되려면
 $A \cup B = U$ 이므로 B 는 무한집합이어야 한다.

② A 가 무한집합이면, $A \cap B^c = \emptyset$ 가 되려면
 $A - B = \emptyset$, $A \subset B$ 이므로 B 도 무한집합이어야
한다. 따라서 B 는 항상 무한집합이다.

24. 다음 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$,

$B = \{1, 3, 8, a \times 3, 2, b + 3, c, 12\}$ 에 대하여
 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 일 때, 자연수 a 가 될 수 있는
 최댓값과 최솟값의 차이를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
 $B = \{1, 2, 3, 8, 12, a \times 3, b + 3, c\}$ 이므로,
 $a \times 3, b + 3, c$ 는 각각 4, 6, 24 중 하나여야 한다.
 $a \times 3 = 4$ 일 때 a 값이 최소가 되고, $a \times 3 = 24$
 일 때 a 값이 최대가 되지만, $a \times 3 = 4$ 일 때의 a
 값은 자연수가 아니므로 부적합하다.
 따라서 a 값이 최소일 때는 $a \times 3 = 6$ 일 때이다.
 최댓값 : $a = 8$
 최솟값 : $a = 2$
 따라서 $8 - 2 = 6$

25. 집합 $S = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$ 의 공집합이 아닌
 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합
 A 의 개수를 구하여라.

• $x \in A$ 이면 $\frac{1}{x} \in A$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가
 되어야 하는 조건을 가진다.

$\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$ 은 역수 관계에 있
 는 두 수의 쌍이다.

(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{1\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$
 개

(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$
 개

(6) 원소의 개수가 6 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\}$
 $\Rightarrow 1$ 개

(7) 원소의 개수가 7 개인 집합 :
 $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 15$ (개)