

단원 종합 평가

1. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\{1, 9\} \subset X \subset A$$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 8개

해설

X 는 원소 1 과 9 를 포함하는 집합 A 의 부분집합
이므로 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$ 이다.

2. 명희네 반 학생 중에서 영어를 좋아하는 학생은 28 명, 수학을 좋아하는 학생은 23 명이다. 영어 또는 수학을 좋아하는 학생이 41 명일 때, 수학만 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 13명

해설

영어를 좋아하는 학생들의 집합을 A , 수학을 좋아하는 학생들의 집합을 B 라고 하면,

$$n(A) = 28, n(B) = 23$$

$$n(A \cup B) = 41$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 28 + 23 - 41 = 10$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 23 - 10 = 13$$

3. 집합 $A = \{a, b, c\}$ 의 부분집합 중 원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원소 a 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{3-1} = 4 (\text{개})$$

원소 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{3-1} = 4 (\text{개})$$

원소 a, b 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{3-2} = 2 (\text{개})$$

원소 a 또는 b 를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$4 + 4 - 2 = 6 (\text{개})$$

4. 집합 $A = \{0, 1, 2, \{1, 2\}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 16개

해설

집합 A 의 원소의 개수는 4 개이므로, $2^4 = 16$ (개)

5. 가로, 세로의 길이가 각각 12cm, 18cm 인 직사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않게 붙여서 정사각형을 만들려고 한다. 이 종이를 만들 수 있는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 36 cm

해설

12와 18의 최소공배수는 36 이므로 정사각형의 한 변의 길이는 36 cm 이다.

6. 720 을 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 4, 중중]

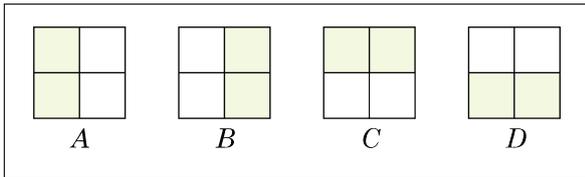
▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이므로
나눌 수 있는 가장 작은 자연수는 5이다.

7. 다음 그림은 각각의 집합을 도형으로 나타낸 것이다.



다음 그림을 위의 집합 A, B, C, D 와 연산 기호를 사용하여 옳게 표현한 것은?



[배점 5, 중상]

- ① $(A \cup B) - (A \cap B)$
- ② $(D \cup C) - (B \cap C)$
- ③ $(A \cup D) - (A \cap D)$
- ④ $(A - C) \cup (C - B)$
- ⑤ $(A - D) \cup (B - A)$

해설

$(A \cup D) - (A \cap D)$

8. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ 일 때, $n(C)$ 는? [배점 5, 중상]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

집합 C 의 원소는

$1 + 2 = 3, 1 + 4 = 5, 1 + 6 = 7,$

$3 + 2 = 5, 3 + 4 = 7, 3 + 6 = 9,$

$5 + 2 = 7, 5 + 4 = 9, 5 + 6 = 11$

에서 $C = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ 이므로 $n(C) = 5$ 이다.

9. 세 개의 원소로 된 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에서 조건 $X \subset Y \subset A$ 를 만족하는 집합 X, Y 를 만들 수 있는 경우는 모두 몇 가지인지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 27 개

해설

- (i) $X = \emptyset$ 일 때, 집합 Y 는 집합 A 의 모든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개)
- (ii) $X = \{a\}$ 일 때 집합 Y 는 원소 a 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^2 = 4$
 $X = \{b\}$, $X = \{c\}$ 일 때도 마찬가지로 $3 \times 4 = 12$ (개)
- (iii) $X = \{a, b\}$ 일 때 집합 Y 는 a, b 를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 개수는 $2^1 = 2$ (개)
 $X = \{a, c\}$, $X = \{b, c\}$ 일 때도 마찬가지이므로 $2 \times 3 = 6$ (개)
- (iv) $X = \{a, b, c\}$ 일 때 $Y = \{a, b, c\}$ 뿐이므로 1 (개)
 $\therefore 27$ 개

10. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

[배점 5, 중상]

- ① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이다.
- ② $A \subset B$ 이면 $A^c \subset B^c$ 이다.
- ③ $B - A = B \cap A^c$
- ④ $A \cap \emptyset^c = A$
- ⑤ $U - \emptyset = A \cap A^c$

해설

- ② $A \subset B$ 이면 $A^c \supset B^c$ 이다.
- ④ $A \cap \emptyset^c = A \cap U = A$
- ⑤ $U - \emptyset = U = A \cup A^c$

11. 두 분수 $\frac{21}{16}$, $\frac{35}{24}$ 의 어느 것에 곱하여도 그 결과가 자연수가 되게 하는 분수 중에서 가장 작은 분수를 구하여라. [배점 5, 중상]

- ① $\frac{8}{7}$
- ② $\frac{48}{7}$
- ③ $\frac{8}{105}$
- ④ $\frac{48}{105}$
- ⑤ $\frac{1}{35}$

해설

구하려는 분수를 $\frac{b}{a}$ 라고 하자.

$$\frac{21}{16} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 16 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 21 \text{의 약수} \end{cases}$$

$$\frac{35}{24} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b \text{는 } 24 \text{의 배수} \\ a \text{는 } 35 \text{의 약수} \end{cases}$$

즉, $\frac{b}{a} = \frac{(16, 24 \text{의 공배수})}{(21, 35 \text{의 공약수})} \dots \text{㉠}$ 이다.

㉠을 만족하는 가장 작은 분수

$$\frac{b}{a} = \frac{(16, 24 \text{의 최소공배수})}{(21, 35 \text{의 최대공약수})}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{48}{7}$$

12. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}$,
 $B = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$ 가 있다.
 이 때, $X - A = \emptyset$, $X \cap B = \emptyset$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 32개

해설

$$A = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 2 \text{의 배수}\}$$

$$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$B = \{x|x \text{는 } 20 \text{보다 작은 } 4 \text{의 배수}\}$$

$$= \{4, 8, 12, 16\}$$

$X - A = \emptyset \Rightarrow X \subset A$, $X \cap B = \emptyset \rightarrow$ 집합 X 는 원소 4, 8, 12, 16 을 반드시 포함하지 않는다.
 따라서 집합 X 의 개수는 $2^{9-4} = 32$ (개)

13. 43 을 어떤 자연수 n 으로 나누면 나머지가 3 이 된다. 또, 49 를 n 으로 나누면 나머지가 1 이 되고 74 를 n 으로 나누면 2 가 남는다. 이러한 자연수 n 을 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 4

▷ 정답: 8

해설

43 을 어떤 자연수 n 으로 나누면 나머지가 3
 $\rightarrow n$ 은 40 의 약수이다. ($3 < n$)
 49 를 n 으로 나누면 나머지가 1
 $\rightarrow n$ 은 48 의 약수이다.
 74 를 n 으로 나누면 2
 $\rightarrow n$ 은 72 의 약수이다.
 위 세 조건을 만족하는 n 을 구하면 $n = 4, 8$

14. $ab = 250$ 이고, a, b 의 최대공약수는 5 를 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 4 개

해설

$a = 5 \times m, b = 5 \times n$ 이라 두면,
 $25 \times m \times n = 250 \rightarrow m \times n = 10$,
 $(a, b) = (5, 50), (10, 25), (25, 10), (50, 5)$
 \therefore (순서쌍 (a, b) 의 개수) = 4 (개)

15. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 9\}, A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 8 개

해설

$A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C$
 $= A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B)$
 $= (A \cap B) = \{1\}$
 $A = \{1, 9\}, (A \cap B) = \{1\}, U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 을 만족하는
 집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로
 집합 B 의 개수는 $2^3 = 8$ (개)