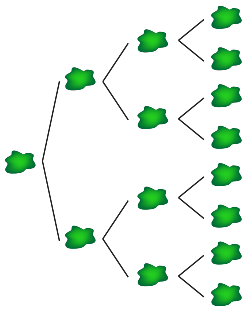
단원 종합 평가

1. 아메바는 둘로 분열하는 과정을 통해 번식을 한다. 아메바가 한 마리가 다음 그림과 같이 분열을 반복할 때, 전체 아메바가 50 마리 이상이 되려면 아메바가 최소 몇 회 분열을 하여야 하는가? (단, 아메바는 각각 한 번씩만 분열하는 것으로 가정한다.)



[배점 3, 중하]

① 4 회 ② 5 회 ③ 6 회
④ 7 회 ⑤ 8 회

해설

아메바 한 마리가 1 회 분열을 하면 2 마리가 생성되어 전체 아메바는 $1+2=3$ (마리)가 된다. 아메바는 각각 한 번씩만 분열하므로 2 회 분열에서는 새로 생성된 2 마리만 각자 분열을 하여 $2\times2=4$ (마리) 가 더 생성된다. 따라서 총 마리수는 $1+2+2^2=7$ (마리)가 된다. 그 다음 3 회 분열을 하면 $1+2+2^2+2^3=15$ (마리)가 된다. 이런 방식으로 분열이 진행될 때마다의 총 마리수를 표로 정리하면 다음과 같다.

분열	총 마리 수(마리)
1회 분열	3
2회 분열	7
3회 분열	15
4회 분열	31
5회 분열	63
⋮	⋮

따라서 최소 5 회 분열을 해야 아메바의 총 마리수가 50 마리 이상이 된다.

2. 무게가 1g, 2g, 2^2g, 2^3g, 2^4g, $\cdots$, 2^{10}g 인 추를 가능한 한 적게 사용하여 무게가 500g 인 물건을 측정할 때, 필요한 추는 몇 개인지 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

$500=111110100_{(2)}$ 이므로
2^8g, 2^7g, 2^6g, 2^5g, 2^4g, 2^2g
$\therefore$ 각각 1 개씩 총 6 개

3. 집합 $A=\{x \mid x=7\times n-4,\ n\text{은 자연수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

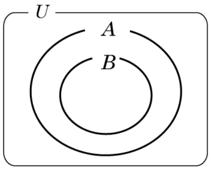
[배점 4, 중중]

① $3\notin A$ ② $4\in A$ ③ $7\notin A$
④ $10\notin A$ ⑤ $17\in A$

해설

$A=\{3,\ 10,\ 17,\ \cdots\}$
① $3\in A$
② $4\notin A$
④ $10\in A$

4. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 옳지 않은 것은?



[배점 4, 중중]

① $A \cup B = A$ ② $A \cap B = B$

③ $(A \cup B) - A = \varnothing$ ④ $(A \cap B) - B = A$

⑤ $B - A^C = B$

해설

$B \subset A$ 이므로 ④ $(A \cap B) - B = \varnothing$ 이다.

5. 두 집합 $A = \{6,\ a,\ 3,\ b,\ 2\}$, $B = \{5,\ c,\ 3,\ d,\ 7\}$ 이 서로 같을 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = B$ 이므로

$\{6,\ a,\ 3,\ b,\ 2\} = \{5,\ c,\ 3,\ d,\ 7\}$

이 중 3 은 공통이므로 제외하면

$a = 5$, $b = 7$ 또는 $a = 7$, $b = 5$

따라서 $a + b = 12$

$c = 2$, $d = 6$ 또는 $c = 6$, $d = 2$

따라서 $c + d = 8$

$\therefore a + b + c + d = 20$

6. 3^{90} 의 일의 자리의 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

3 의 거듭제곱 수마다 일의 자리 수를 구해보면 3, 9, 7, 1 이 반복되는 것을 알 수 있다.

3의 거듭제곱수	일의 자리 수
3^1 (=3)	3
3^2 (=3×3=9)	9
3^3 (=3×3×3=27)	7
3^4 (=3×3×3×3=81)	1
3^5 (=3×3×3×3×3=243)	3
3^6 (=3×3×3×3×3×3=729)	9
⋮	⋮

90 은 4 로 나누었을 때 나머지가 2 이므로 3^{90} 의 일의 자리의 수는 9 이다.

7. 밑변의 길이가 $1011_{(2)}$cm , 높이가 $110_{(2)}$cm 인 삼각형의 넓이를 십진법으로 나타내어라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $33\,\text{cm}^2$

해설

(밑변) $= 1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 8 + 2 + 1 = 11$(cm)

(높이) $= 110_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 4 + 2 = 6$(cm)

$\therefore$ (넓이) $= 11 \times 6 \div 2 = 33(\text{cm}^2)$

8. 216 을 소인수분해하면 $2^a \times b^c$ 이다. 이때, $a + b + c$ 의 값은? [배점 5, 중상]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$216 = 2^3 \times 3^3$
따라서 $a=3,\ b=3, c=3$
$a+b+c=9$

9. 두 수 A 와 B 의 최소공배수는 18 이고, 두 수 C 와 D 의 최소공배수는 24 이다. 네 수 A , B , C , D 의 공배수로 알맞은 것을 모두 고르면?(정답 2 개) [배점 5, 중상]

① 18 ② 36 ③ 72
④ 90 ⑤ 144

해설

A 와 B 의 최소공배수는 18 이고, 두 수 C 와 D 의 최소공배수는 24 이므로, 네 수 A , B , C , D 의 최소공배수는 72 이다. 따라서 A , B , C , D 의 공배수는 72 의 배수이다.

10. $11_{(2)} < A \le 10011_{(2)}$ 을 만족하는 자연수 A 중 소수는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

$11_{(2)}=3,\ 10011_{(2)}=19$
$3 < A \le 19$ 인 소수는 5, 7, 11, 13, 17, 19 로 6 개이다.

11. 두 자연수 $a,\ b$ 의 합은 216 이고 최대공약수는 18 이다. 이 때 ab 의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11664

해설

$a=18\times n,\ b=18\times m$ 이라 둘 수 있다.
$a+b=18\times(n+m)=216$
$\rightarrow n+m=12$
따라서 $(n,\ \ m)$ 이 될 수 있는 순서쌍은 $(1,11),(2,10),\ (3,9),(4,8),\ (5,7),(6,6),\ (7,5),(8,4),\ (9,3),(10,2),\ (11,1)$ 이다.
그런데 $ab=18\times18\times n\times m$ 이므로 ab 가 최댓값은 $n=m=6$ 일 때이다.
$\therefore ab$ 의 최댓값$=11664$

12. 1 부터 어떤 자연수 n 까지의 곱을 $n!$ 이라고 한다. 25! 을 계산하였을 때, 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수는 10 의 거듭제곱의 개수이다.
$10=2\times5$ 이므로 25! 에서 2×5 의 인수를 찾아보면,
$2\times4\times5\times6\times8\times10\times12\times14\times15\times16\times18\times20\times22\times24\times25=(2\times5)^6\times a$
$\therefore$ 25! 에서 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수$=6$ 개

13. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10$ 을 십진법으로 나타낼 때, 끝자리에 연속한 0 의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

십진법으로 나타낼 때 끝자리에서 계속되는 0 의 개수는 10 의 거듭제곱과 관계가 있다. 즉, 10 의 배수가 아닌 자연수 a 에 대하여 $N = a \times 10^n$ 일 때, N 의 끝자리에서 계속되는 0 은 n 개이다.

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 \times 10$

$= 1 \times 2 \times 3 \times (2 \times 2) \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (2 \times 5)$

$= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

$= 3^4 \times 7 \times (2^8 \times 5^2)$

$= 3^4 \times 7 \times 2^6 \times (2^2 \times 5^2)$

$= 3^4 \times 7 \times 2^6 \times 10^2$

따라서 끝자리에서 연속되는 0 은 2 개이다.

14. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $(A \cup B)^c = A \cap B^c = \varnothing$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? [배점 6, 상중]

① B 는 무한집합이다.

② B 는 무한집합이다.

③ A 가 무한집합이면 B 는 유한집합이다.

④ A 가 유한집합이면 B 는 유한집합이다.

⑤ A , B 모두 무한집합이 아니다.

해설

① A 가 유한집합이면, $(A \cup B)^c = \varnothing$ 가 되려면 $A \cup B = U$ 이므로 B 는 무한집합이어야 한다.
② A 가 무한집합이면, $A \cap B^c = \varnothing$ 가 되려면 $A - B = \varnothing$, $A \subset B$ 이므로 B 도 무한집합이어야 한다. 따라서 B 는 항상 무한집합이다.

15. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

$A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C$

$= A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B)$

$= (A \cap B) = \{1\}$

$A = \{1, 9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 을 만족하는
집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로
집합 B 의 개수는 $2^3 = 8$(개)