

문제 풀이 과제

1. 구 모양의 공 하나가 정육면체 안에 꼭 맞게 들어간다고 한다. 이 때, 공의 반지름이 6cm 라고 할 때, 공과 정육면체의 부피를 각각 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

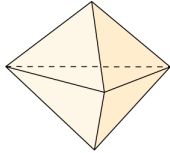
▶ 정답: 공의 부피 : $288\pi \text{ cm}^3$

▶ 정답: 정육면체의 부피 : 1728 cm^3

해설

반지름의 길이가 6cm 인 공의 부피는 $\frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi(\text{cm}^3)$ 이고, 정육면체의 부피는 $12 \times 12 \times 12 = 1728(\text{cm}^3)$ 이다.

2. 다음 그림은 정사면체의 한 면을 붙여 만든 다면체이다. 이 입체도형이 정다면체가 아닌 이유는?



[배점 4, 중중]

- ① 모든 면이 합동이 아니다.
- ② 각 면이 정다각형이 아니다.
- ③ 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 다르다.
- ④ 각 꼭짓점에 모인 각의 크기의 합이 360° 보다 크다.
- ⑤ 평행한 면이 존재하지 않는다.

해설

- 정다면체가 되는 조건
 - ㉠. 모든 면이 합동인 정다각형인 다면체
 - ㉡. 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같은 다면체
- 그림의 입체도형은 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 다르기 때문에 정다면체가 될 수 없다.

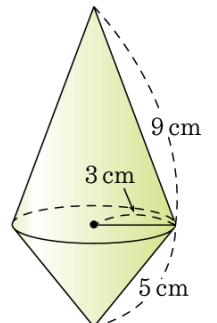
3. 다음 중 정육면체를 평면으로 잘랐을 때 나타날 수 있는 단면이 아닌 것은? [배점 4, 중중]

- ① 정삼각형
- ② 육각형
- ③ 직사각형
- ④ 직각삼각형
- ⑤ 오각형

해설

정육면체를 평면으로 잘랐을 때 나올 수 있는 단면은 정삼각형, 이등변삼각형, 등변사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 오각형, 육각형, 사다리꼴, 사각형이다.

4. 다음 입체도형은 밑면의 크기가 같은 두 원뿔을 붙여 놓은 것이다. 이 입체도형의 겉넓이를 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: $42\pi \text{ cm}^2$

해설

$$\pi \times 3 \times 9 + \pi \times 3 \times 5 = 27\pi + 15\pi = 42\pi(\text{cm}^2)$$

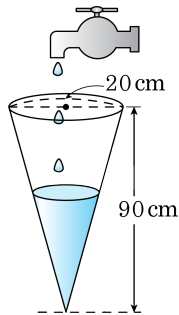
5. 다음 중 다면체가 아닌 것은? [배점 4, 중중]

- ① 사각뿔 ② 오각기둥 ③ 삼각뿔대
 ④ 원뿔대 ⑤ 육각뿔

해설

④ 원뿔대는 회전체이다.

6. 다음 그림과 같이 밑면의 지름의 길이가 20cm, 높이가 90cm 인 원뿔 모양의 그릇에 1분에 $40\pi\text{cm}^3$ 의 속도로 물을 담을 때, 빈 그릇에 물을 가득 채우려면 몇 분이 걸리는지 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

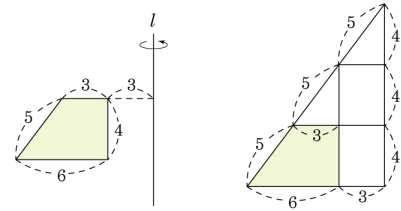
▶ 정답: 75 분

해설

$$(\text{원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times 90 = 3000\pi(\text{cm}^3)$$

$$\text{물을 가득 채우는 데 걸리는 시간은 } \frac{3000\pi}{40\pi} = 75(\text{분})$$

7. 다음 그림과 같이 윗변 3, 아랫변 6, 높이 4 인 사다리꼴이 직선 l 에서 3 만큼 떨어져 있다. 이 사다리꼴을 직선 l 을 축으로 회전시켰을 때, 만들어지는 입체도형의 부피를 구하여라.



[배점 5, 중상]

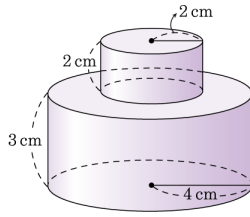
▶ 답:

▶ 정답: 192π

해설

밑면의 반지름이 9 이고 높이가 12 인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi \times 9^2 \times 12 = 324\pi$
 밑면의 반지름이 6 이고 높이가 8 인 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$
 밑면의 반지름이 3 이고 높이가 4 인 원기둥의 부피는 $\pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$
 따라서, $V = 324\pi - 96\pi - 36\pi = 192\pi$

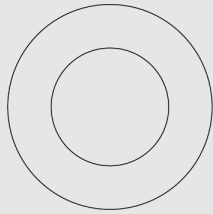
8. 다음 그림과 같은 입체도형의 겉넓이는?



[배점 5, 중상]

- ① $36\pi\text{cm}^2$ ② $48\pi\text{cm}^2$ ③ $52\pi\text{cm}^2$
 ④ $64\pi\text{cm}^2$ ⑤ $72\pi\text{cm}^2$

해설

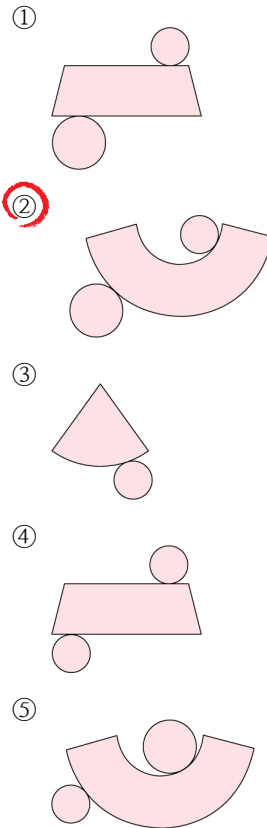


위에서 보면 이므로 $r = 4$ 인 원이 윗면, 밑면 2개와 위의 원기둥의 옆면과 아래 원기둥의 옆면의 넓이를 더한다.

$$\begin{aligned} & (\text{옆면의 넓이}) + (\text{큰 원기둥의 밑면의 넓이}) \\ &= (8\pi \times 4\pi \times 2) + 16\pi \times 2 \\ &= 24\pi + 8\pi + 32\pi = 64\pi \end{aligned}$$

9. 다음 중 원뿔대의 전개도는?

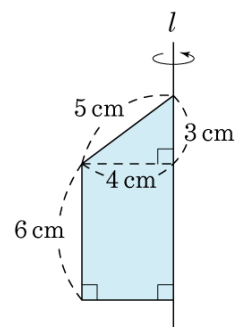
[배점 5, 중상]



해설

②와 같은 전개도면일 때 원뿔대가 만들어진다.

10. 다음 그림과 같은 평면도형을 직선 l 을 축으로 회전시켰을 때 만들어지는 회전체의 겉넓이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

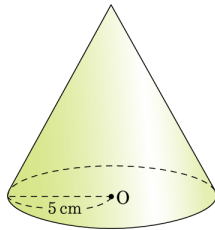
▶ 답 :

▶ 정답 : $84\pi\text{cm}^2$

해설

$$\begin{aligned} (\text{원뿔의 겉넓이}) &= (\text{부채꼴의 넓이}) + (\text{밑넓이}) \\ 4^2\pi + 8\pi \times 6 + 8\pi \times 5 \times \frac{1}{2} &= 84\pi(\text{cm}^2) \end{aligned}$$

11. 다음 그림과 같이 원뿔의 겉넓이가 $100\pi\text{cm}^2$ 일 때, 이 원뿔의 모선의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

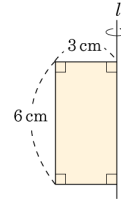
▶ 답 :

▶ 정답 : 15 cm

해설

$$\begin{aligned} (\text{원뿔의 겉넓이}) &= (\text{밑넓이}) + (\text{옆넓이}) \text{에서} \\ \text{모선의 길이를 } l \text{이라고 하면} \\ S &= \pi r^2 + \pi r l = 25\pi + 5\pi l = 100\pi\text{cm}^2 \\ 5\pi l &= 75\pi\text{cm}^2 \\ \therefore l &= 15\text{cm} \end{aligned}$$

12. 다음 그림의 직사각형을 직선 l 을 축으로 하여 1 회전시켰을 때 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

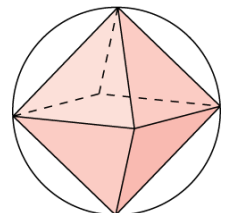
▶ 답 :

▶ 정답 : $54\pi\text{cm}^2$

해설

직사각형을 직선 l 을 축으로 1 회전시키면 원기둥이 된다.
따라서 원기둥의 겉넓이는
 $S = \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \times \text{높이} = 9\pi \times 2 + 6\pi \times 6 = 18\pi + 36\pi = 54\pi(\text{cm}^2)$ 이다.

13. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 구 안에 꼭 맞게 정팔면체가 있다. 정팔면체의 부피를 V_1 , 구의 부피를 V_2 라고 할 때, $V_1 : V_2$ 를 구하면?



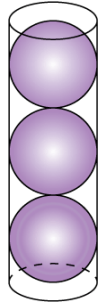
[배점 5, 상하]

- ① 1 : 1 ② 1 : π ③ 2 : π
④ 2 : 1 ⑤ 3 : 1

해설

$$\begin{aligned} V_1 &= 2 \times \left(\frac{1}{3} \times 2r \times r \times r\right) = \frac{4}{3}r^3 \\ V_2 &= \frac{4}{3}\pi \times r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \therefore V_1 : V_2 &= \frac{4}{3}r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = 1 : \pi \end{aligned}$$

14. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4cm 인 원기둥에 물을 가득 채운 후, 공 3 개를 넣었더니 꼭 맞게 들어갔다. 흘러넘친 물의 부피를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답:

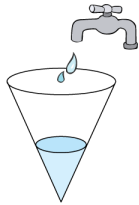
▷ 정답: $256\pi \text{ cm}^3$

해설

흘러넘친 물의 부피는 공 3 개의 부피와 같다.

$$\therefore (\text{흘러넘친 물의 부피}) = 3 \times \left(\frac{4}{3} \pi \times 4^3 \right) = 256\pi (\text{cm}^3)$$

15. 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 5cm , 높이가 12cm 인 원뿔 모양의 그릇에 5 분에 $20\pi \text{ cm}^3$ 의 속도로 물을 담을 때, 빈 그릇에 물을 완전히 채우려면 몇 분이 걸리겠는지 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 25 분

해설

원뿔 모양의 그릇의 부피를 구하면

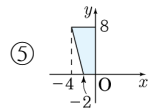
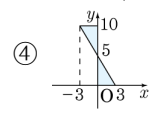
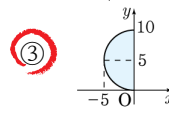
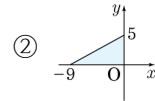
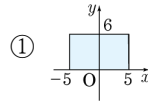
$$(\text{원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 = 100\pi (\text{cm}^3)$$

그런데 1 분에 $4\pi \text{ cm}^3$ 의 물이 채워지므로 그릇을 완전히 채우려면

$$100\pi \div 4\pi = 25 (\text{분})$$

16. 다음 도형들을 y 축을 축으로 하여 1 회전 시켰을 때, 생기는 입체도형 중 부피가 가장 큰 것은?

[배점 6, 상중]



해설

$$\textcircled{1} (\text{부피}) = \pi \times 5^2 \times 6 = 150\pi (\text{cm}^3)$$

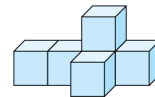
$$\textcircled{2} (\text{부피}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 5 = 135\pi (\text{cm}^3)$$

$$\textcircled{3} (\text{부피}) = \frac{4}{3} \pi \times 5^3 = \frac{500}{3} \pi (\text{cm}^3)$$

$$\textcircled{4} (\text{부피}) = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 \right) = 30\pi (\text{cm}^3)$$

$$\textcircled{5} (\text{부피}) = \left(\frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 16 \right) - \left(\frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 8 \right) = \frac{224}{3} \pi (\text{cm}^3)$$

17. 마주보는 면에 있는 눈의 합이 7 인 정육면체 주사위 6 개를 다음과 같이 이어붙였을 때, 겉면에 나타나는 눈의 총합의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 하자. $M - m$ 의 값을 구하여라.



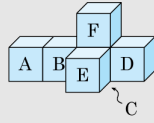
[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 28

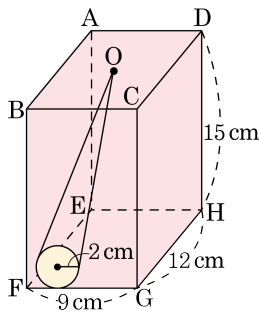
해설

주사위 6 개를 다음 그림과 같이 A, B, C, D, E, F 라 할 때,



보이는 면의 눈의 합이 최댓값을 갖기 위해서는 A, D, E, F 의 보이지 않는 면의 눈이 1, C 의 보이지 않는 면의 눈의 합이 $1 + 2 + 7 = 10$ 따라서 $M = (7 \times 3) \times 6 - 7 - (1 \times 4 + 10) = 112$ 보이는 면의 눈의 합이 최솟값을 갖기 위해서는 A, D, E, F 의 보이지 않는 면의 눈이 6, C 의 보이지 않는 면의 눈의 합이 $6 + 5 + 7 = 18$ 따라서 $m = (7 \times 3) \times 6 - (6 \times 4 + 18) = 77$ $\therefore M - m = 105 - 77 = 28$

18. 다음 그림과 같이 직육면체의 한 면 ABCD 위의 한 점 O를 꼭짓점으로 하고 면 EFGH 위를 움직이는 반지름의 길이가 2cm인 원을 밑면로 하는 원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면이 사각형 EFGH 위에서 계속 움직일 때, 원뿔이 움직인 공간의 최대의 부피를 구하여라.



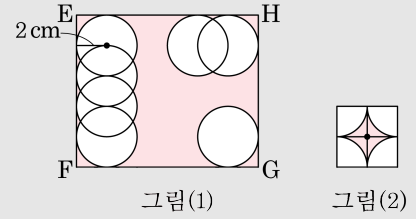
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $(460 + 20\pi) \text{ cm}^3$

해설

원뿔의 밑면이 □EFGH 위에서 움직인 모양은 아래 그림 (1) 과 같다.



□EFGH 위에서 원뿔의 밑면이 움직이면 오른쪽 그림과 같이 네 귀퉁이의 색칠한 부분은 밑면이 지나지 못한다. 색칠한 부분을 모아 붙이면 그림 (2)와 같으므로 원뿔의 밑면이 지나지 못하는 □EFGH 위의 넓이는 $16 - 4\pi(\text{cm}^2) \dots \textcircled{1}$ 이다. 따라서 원뿔이 움직인 공간의 밑면의 넓이는 □EFGH의 넓이에서 ①을 뺀 것과 같다.

$$\begin{aligned} (\text{구하는 부피}) &= \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이}) \\ &= \frac{1}{3} \times \{9 \times 12 - (16 - 4\pi)\} \times 15 \\ &= (92 + 4\pi) \times 5 \\ &= 460 + 20\pi(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

19. 다음 그림과 같이 원뿔 모양의 그릇에 깊이의 $\frac{3}{5}$ 까지 물을 넣었더니 물의 부피가 $54\pi \text{ cm}^3$ 가 되었다. 그릇에 물이 담기지 않은 곳의 부피를 구하여라.



[배점 6, 상중]

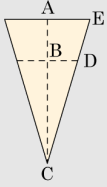
▶ 답 :

▷ 정답 : $196\pi \text{ cm}^3$

해설

다음 그림과 같이 원뿔을 단면으로 보면 $\triangle ACE$ 와 $\triangle BCD$ 는 모양이 같고 크기가 다른 삼각형이다.

따라서 $\overline{AC} : \overline{BC} = 5 : 3$



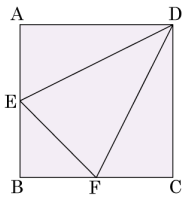
꼭짓점을 C로 하고 밑면을 각각 AE, BD로 하는 원뿔의 부피의 비는 $5^3 : 3^3 = 125 : 27$

따라서 원뿔 전체의 부피를 x 라 하면 $125 : 27 = x : 54\pi$ 의 비례식이 성립한다.

$$\therefore x = 250\pi$$

$$\therefore (\text{그릇에 물이 담기지 않은 곳의 부피}) = 250\pi - 54\pi = 196\pi(\text{cm}^3)$$

20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 10cm 인 정사각형에서 변 AB, BC의 중점을 E, F라 할 때, 변 ED, EF, DF를 따라 접어서 생기는 사면체의 부피를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{125}{3} \text{cm}^3$

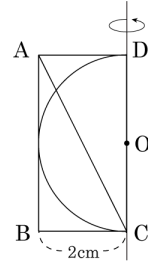
해설

사면체의 꼭짓점을 D라 하고 밑면을 $\triangle BEF$ 라 할 때, 사면체의 꼭짓점에서 밑면에 그은 수선의 길이는 정사각형의 한 변의 길이와 같다.

따라서 사면체의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 5\right) \times 10 = \frac{125}{3}(\text{cm}^3)$$

21. 사각형 ABCD, 반원 O, 삼각형 ABC를 직선 l 을 한 바퀴 회전해서 만들어지는 입체도형의 부피를 각각 V_1, V_2, V_3 라고 할 때, $V_1 + V_2 + V_3$ 의 값을 구하면?



[배점 6, 상상]

- ① $\frac{448}{3}\pi \text{cm}^3$ ② $\frac{336}{3}\pi \text{cm}^3$ ③ $\frac{224}{3}\pi \text{cm}^3$
 ④ $\frac{112}{3}\pi \text{cm}^3$ ⑤ $\frac{56}{3}\pi \text{cm}^3$

해설

V_1 : 원기둥

V_2 : 구

V_3 : 원기둥-원뿔

원뿔:구:원기둥 = 1 : 2 : 3 이므로

$$V_1 = \text{원뿔} \times 3$$

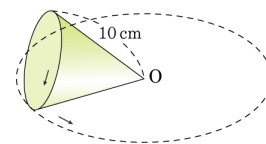
$$V_2 = \text{원뿔} \times 2$$

$$V_3 = \text{원뿔} \times 2$$

따라서 $V_1 + V_2 + V_3 = \text{원뿔} \times 7$

$$\therefore \frac{1}{3} \times 2^2 \times \pi \times 4 \times 7 = \frac{112}{3}\pi \text{cm}^3$$

22. 아래 그림과 같이 모선의 길이가 10cm 인 원뿔을 점 O를 중심으로 회전시켜 다시 점 A로 돌아올 때까지 원뿔은 $\frac{10}{3}$ 회 회전 한다고 할 때, 이 원뿔의 겉넓이를 구하면?



[배점 6, 상상]

- ① $37\pi \text{cm}^2$ ② $39\pi \text{cm}^2$ ③ $41\pi \text{cm}^2$
 ④ $42\pi \text{cm}^2$ ⑤ $45\pi \text{cm}^2$

해설

O 를 중심으로 하는 큰 원의 원주의 길이는 $2\pi \times 10 = 20\pi(\text{cm})$ 이고 원뿔의 밑면의 원주의 길이는 $2\pi r$ 이다.

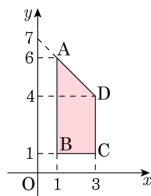
(큰 원주의 길이) = (원뿔의 밑면 원주의 길이) $\times$ (회전수) 이므로

$$20\pi = 2r\pi \times \frac{10}{3}, r = 3(\text{cm}) \text{ 이다.}$$

(원뿔의 겉넓이) = (밑넓이) + (옆넓이 : 부채꼴의 넓이)

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 + \pi r l \\ &= 9\pi + \pi \times 3 \times 10 \\ &= 39\pi \text{cm}^2 \end{aligned}$$

23. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A(1, 6), B(1, 1), C(3, 1), D(3, 4) 가 있다. 사각형 ABCD 를 y 축을 회전축으로 하여 1 회전 시켰을 때 생기는 입체도형의 부피를 구하면?



[배점 6, 상상]

- ① $\frac{88}{3}\pi$ ② $\frac{89}{3}\pi$ ③ $\frac{91}{3}\pi$
 ④ $\frac{92}{3}\pi$ ⑤ $\frac{94}{3}\pi$

해설

원뿔대의 부피는

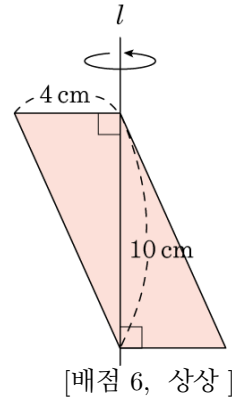
$$\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 3 - \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 1 = 9\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{26}{3}\pi$$

큰 원기둥의 부피는 $\pi \times 3^2 \times 3 = 27\pi$

안쪽의 작은 원기둥의 부피는 $\pi \times 1^2 \times 5 = 5\pi$

따라서 구하는 부피는 $\frac{26}{3}\pi + 27\pi - 5\pi = \frac{92}{3}\pi$ 이다.

24. 다음 그림의 도형을 직선 l 을 축으로 하여 1 회전시킬 때, 생기는 입체도형의 부피를 구하여라.

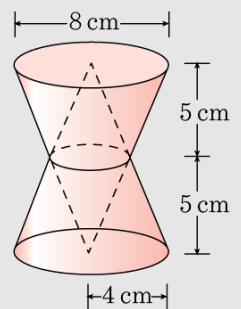


▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{280}{3}\pi \text{cm}^3$

해설

$$\begin{aligned} (\text{부피}) &= 2 \times \left(\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times \right. \\ &\quad \left. 10 - \frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 5 \right) = \\ &\quad \frac{280}{3}\pi(\text{cm}^3) \end{aligned}$$



25. 모서리의 길이가 모두 같은 정오각형 2 개와 정삼각형 10 개로 이루어진 십이면체가 있다. 각 모서리를 삼등분한 점들을 이어서 만들어지는 사각뿔을 모두 잘라 내고 남은 도형의 꼭짓점의 개수 v 와 모서리의 개수 e 와 면의 개수 f 의 합을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 122

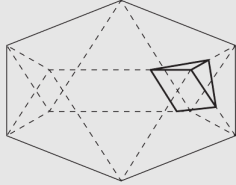
해설

십이면체의 꼭짓점의 개수는 10 개

십이면체의 모서리의 개수는 20 개

십이면체의 면의 개수는 12 개

십이면체의 삼등분점을 이어서 만들어지는 사각뿔은 다음 그림과 같으며, 이런 사각뿔은 각 꼭짓점마다 만들어지므로 총 10 개의 사각뿔이 잘리게 된다.



이런 사각뿔을 모두 잘라 내면 십이면체의 한 꼭짓점마다 꼭짓점은 4 개가 새로 생기고 1 개가 없어져서 총 3 개씩 늘어나고, 모서리는 4 개씩 늘어나고, 면은 1 개씩 늘어나므로

$$v = 10 + 3 \times 10 = 40$$

$$e = 20 + 4 \times 10 = 60$$

$$f = 12 + 1 \times 10 = 22$$

$$\therefore v + e + f = 122$$