단원 형성 평가

1. 두 점 A$(-3,\ -5)$, B$(a,\ 1)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{13}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=\ 1$

▷ 정답 : $a=\ -7$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-3-a)^2+(-5-1)^2}=2\sqrt{13}$ 이므로

$\sqrt{9+6a+a^2+36}=2\sqrt{13}$

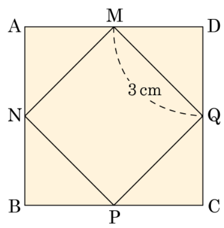
양변을 제곱하면 $a^2+6a+45=52$

$a^2+6a-7=0$

$(a-1)(a+7)=0$

따라서 $a=1$ 또는 $a=-7$ 이다.

2. 다음 그림과 같이 정사각형 ABCD 의 각 변의 중점들을 연결하여 정사각형 MNPQ 을 그렸다. 정사각형 MNPQ 의 한 변의 길이가 3cm 일 때, 정사각형 ABCD 의 넓이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $18\,\mathrm{cm}^2$

해설

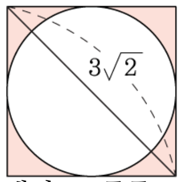
$\overline{\mathrm{MQ}}$ 의 길이가 3cm 이므로

$\overline{\mathrm{MD}}$ 의 길이는 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$cm 가 된다.

그러므로 정사각형 ABCD 의 한 변의 길이는 $3\sqrt{2}$cm 가 된다.

정삭가형 ABCD 의 넓이는 $3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=18(\mathrm{cm}^2)$

3. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 정사각형 안에 내접하는 원이 있다. 이 때, 색칠한 부분의 넓이는?



[배점 4, 중중]

① $3\pi-3\sqrt{2}$ ② $3-\frac{3}{2}\pi$ ③ $9-\frac{9}{4}\pi$

④ $9-\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $3-\frac{1}{2}\pi$

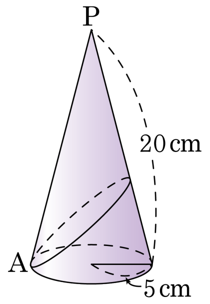
해설

대각선의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 정사각형의 한 변의 길이는 3 이고, 한 변의 길이는 내접원의 지름과 같으므로 원의 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이는 정사각형의 넓이에서 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$3\times3-\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\pi=9-\frac{9}{4}\pi$ 이다.

4. 다음 그림과 같이 모선의 길이가 20cm , 밑면의 원의 반지름의 길이가 5cm 인 원뿔의 밑면의 한 점 A 에서 옆면을 지나 다시 점 A 로 되돌아오는 최단 거리를 구하여라.



[배점 4, 중중]

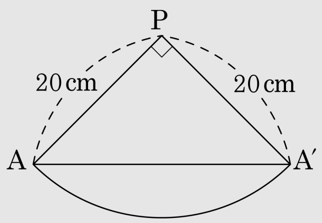
▶ 답 :

▷ 정답 : 20 cm

해설

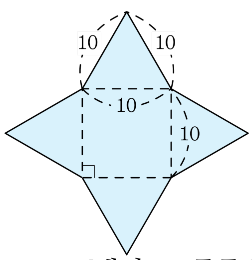
전개도에서 부채꼴의 중심각의 크기는

$\frac{5}{20} \times 360° = 90°$,



최단 거리 $\overline{AA'} = 20\sqrt{2}\,\text{cm}$ 이다.

5. 다음 그림과 같은 전개도로 사각뿔을 만들 때, 이 사각뿔의 높이를 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답 :

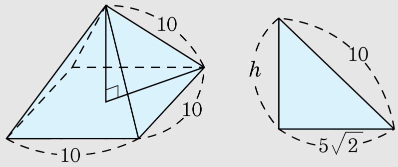
▷ 정답 : $5\sqrt{2}$

해설

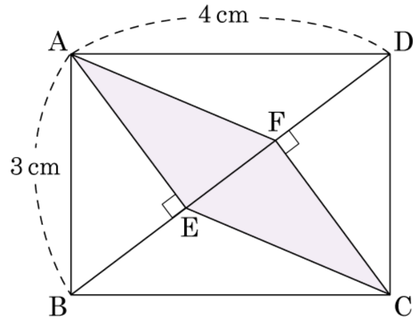
정사각형의 대각선의 길이는 $10\sqrt{2}$

$h^2 + (5\sqrt{2})^2 = 10^2$

$\therefore h = 5\sqrt{2}$



6. 다음 직사각형 ABCD 의 두 꼭짓점 A, C 에서 대각선 BD 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 할 때, □AECF 의 넓이는?



[배점 5, 중상]

① $\frac{8}{5}\,\text{cm}^2$ ② $\frac{84}{25}\,\text{cm}^2$ ③ $12\,\text{cm}^2$

④ $11\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ⑤ $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

해설

$\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\,\text{cm})$

$5 \times \overline{AE} = 3 \times 4$

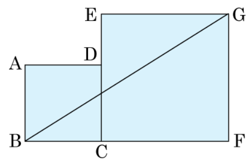
$\therefore \overline{AE} = \frac{12}{5}\,\text{cm}$

$\overline{BE} = \sqrt{3^2 - (\frac{12}{5})^2} = \frac{9}{5}\,(\,\text{cm})$

$\overline{BE} = \overline{DF}$ 이므로 $\overline{EF} = 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5}\,(\,\text{cm})$

$\therefore$ □AECF $= \frac{12}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{84}{25}(\text{cm}^2)$

7. 다음 그림은 정사각형을 두 개 연결해놓은 그림이다. 정사각형 ABCD 의 넓이는 12cm^2 , 정사각형 ECFG 의 넓이는 48cm^2 일 때, $\overline{\text{BG}}$ 의 길이를 구하여라.



. [배점 5, 중상]

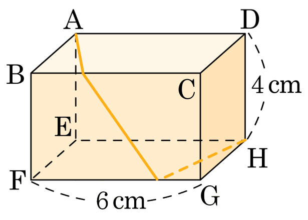
▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{39}\,\text{cm}$

해설

정사각형 ABCD 의 넓이가 12cm^2 이므로 $\overline{\text{BC}}$ 의 길이는 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$ 이다.
정사각형 ECFG 의 넓이가 $48\ \text{cm}^2$ 이므로 $\overline{\text{CF}}$ 의 길이는 $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$ 이다.
$\overline{\text{BF}} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}(\text{cm})$, $\overline{\text{GF}} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$
$\overline{\text{BG}} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{108 + 48} = \sqrt{156} = 2\sqrt{39}(\text{cm})$

8. 다음 그림과 같이 직육면체의 점 A 에서 모서리 BC, FG 를 지나 점 H 에 이르는 최단거리가 $2\sqrt{58}\text{cm}$ 라 할 때, $\overline{\text{AB}}$ 의 길이를 구하여라.

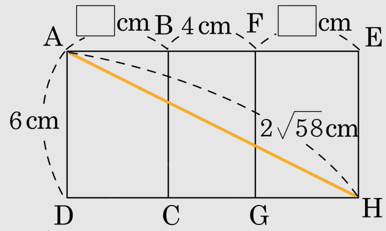


[배점 5, 중상]

① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm
④ 6 cm ⑤ 7 cm

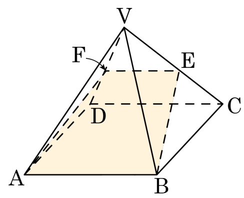
해설

전개도를 그려보면



$\overline{\text{DH}} = \sqrt{(2\sqrt{58})^2 - 6^2}$
$= \sqrt{232 - 36}$
$= \sqrt{196}$
$= 14(\text{cm})$
$\therefore \overline{\text{AB}} = (14 - 4) \div 2 = 5(\text{cm})$

9. 다음 그림과 같이 모서리의 길이가 모두 8 cm 인 정사각뿔에서 $\overline{\text{VC}}$, $\overline{\text{VD}}$ 의 중점을 각각 E, F 라고 할 때, □ABEF 의 넓이를 구하면?

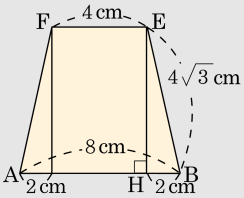


[배점 5, 중상]

① $11\sqrt{10}\,\text{cm}^2$ ② $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2$
③ $12\sqrt{6}\,\text{cm}^2$ ④ $12\sqrt{11}\,\text{cm}^2$
⑤ $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ⑥

해설

$\overline{AF} = \overline{BE}$, $\overline{EF} // \overline{AB}$ 이므로 □ABEF 는 등변사다리꼴이다.



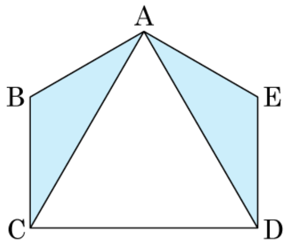
$\overline{AB} = 8\,\text{cm}$, $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 4\,\text{cm}$ (∵ 중점연결 정리)

$\overline{BE}$, $\overline{AF}$ 는 한 변의 길이가 8 cm 인 정삼각형의 높이이므로 $\overline{BE} = \overline{AF} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$

사다리꼴의 높이 $\overline{EH} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}(\text{cm})$ 이다.

∴ □ABEF $= (8+4) \times 2\sqrt{11} \times \frac{1}{2} = 12\sqrt{11}(\text{cm}^2)$

10. 다음 그림의 오각형 ABCDE 에서 $\angle A = \angle B = 120°$, $\angle C = 90°$ $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{AE} = 6$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



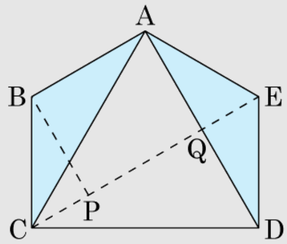
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $18\sqrt{3}$

해설

$\overline{BC} = \overline{AE}$, $\angle A = \angle B$ 이므로 □ABCE 는 등변사다리꼴이다.



점 A, B 에서 $\overline{CE}$ 에 내린 수선의 발을 각각 P, Q 라 하면

$\overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고 $\overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AE} = \overline{DE} = 6$ 이므로

∴ $\overline{CP} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $\overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

∴ $\overline{CE} = \overline{CP} + \overline{PQ} + \overline{QE} = 3 + 6 + 3 = 12$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 오각형 ABCDE 의 넓이에서 삼각형 ACD 의 넓이를 뺀 값이다.

∴ △CDE + □ABCE − △ACD

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times (6 + 12) \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times (6 + 3)$

$= 18\sqrt{3}$

11. 원 O 에 내접하는 정팔각형의 넓이가 $32\sqrt{2}$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 중심 O 에서 정팔각형의 이웃하는 두 꼭짓점에 선을 긋고 각각 A, B 라 했을 때,

$\angle AOB = 360° \div 8 = 45°$ 이다.

또 점 A 에서 $\overline{OB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

△AOH 에서 (반지름의 길이) : $\overline{AH} = \sqrt{2} : 1$

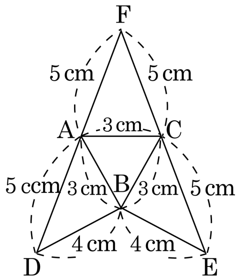
∴ $\overline{AH} = \frac{(\text{반지름의 길이})}{\sqrt{2}}$

반지름의 길이를 r 이라 하면, △AOB $= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{AH} = \frac{1}{2}r \times \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{2}$

따라서 정팔각형의 넓이는 $\frac{r^2}{4}\sqrt{2} \times 8 = 2\sqrt{2}r^2 = 32\sqrt{2}$ 이므로

$r = 4$ 이다.

12. 다음 그림과 같은 전개도를 가지는 삼각뿔의 부피를 구하여라.



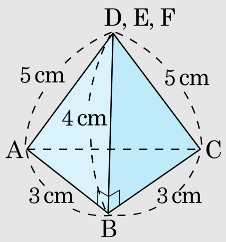
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

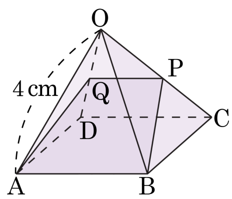
해설

$3^2 + 4^2 = 5^2$ 이므로 $\triangle ADB$ 와 $\triangle BEC$ 는 $\angle ABD = \angle CBE = 90°$ 인 직각삼각형이다.



$$(\text{삼각뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times \overline{DB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3^2 \times 4 = 6$$

13. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 4 cm 인 정사각뿔에서 P, Q 는 각각 $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ 의 중점일 때, □QABP 의 넓이를 구하여라.



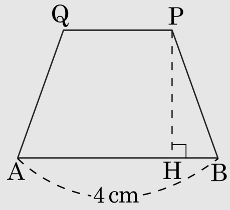
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{11}\,\text{cm}^2$

해설

□QABP 는 $\overline{QP} \,//\, \overline{AB}$ 인 사다리꼴



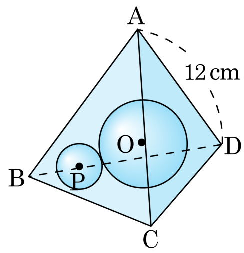
$\overline{QP} = \frac{\overline{AB}}{2} = 2$ (cm)

$\triangle PHB$ 에서 $\overline{PB} = 2\sqrt{3}$ (cm), $\overline{HB} = 1$ (cm)

$\therefore\ \overline{PH} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{11}$ (cm)

$\square QABP = (2+4) \times \sqrt{11} \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{11}$ (cm^2)

14. 다음 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12 cm 인 정사면체 안에 정사면체의 4 개 의 면에 접하는 구를 O 라고 하고 사면체의 3 개 의 면에 접하고 구 O 와 외접하는 구를 P 라고 할 때, 구 P 의 부피를 구하여라.



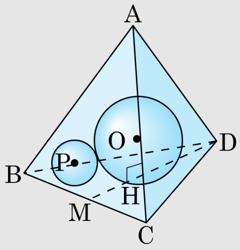
[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{6}\pi\ \text{cm}^3$

해설

구 O 의 반지름을 r, 구 P 의 반지름을 r' 이라고 하면 점 H 는 $\triangle$BCD 의 무게중심이므로



$\overline{\mathrm{DH}} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{DM}} = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{3}$ (cm)

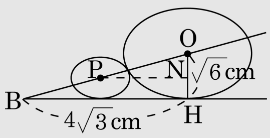
따라서, $\overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{6}$ (cm)

(정사면체 A $-$ BCD 의 부피)

$= \frac{1}{3} \times 12 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6}$

$= 4 \times \frac{1}{3} \times 12 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times r$

$\therefore\ r = \sqrt{6}$ (cm)



$\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{6}$ (cm)

$\triangle$OPN $\backsim$ $\triangle$OBH 이므로

$\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{ON}} : \overline{\mathrm{OH}}$

$\left(r' + \sqrt{6}\right) : 3\sqrt{6} = \left(\sqrt{6} - r'\right) : \sqrt{6}$

$\sqrt{6}r' + 6 = 18 - 3\sqrt{6}r'$

$4\sqrt{6}r' = 12$

$\therefore\ r' = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (cm)

$\therefore$ (구 P의 부피) $= \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi$ (cm^3)

15. 가로, 세로, 높이가 각각 2, 2, 4 인 직육면체의 꼭짓점 중 세 점을 골라 삼각형을 만들 때, 가장 긴 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 삼각형은 몇 개 만들 수 있는지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24 가지

해설

(i) 세 변의 길이가 $2\sqrt{2},\ 2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}$ 인 이등변삼각형
: 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 변은 윗면과 아랫면에서 각각 2 개씩, 모두 4 개가 생기고, 그 각각의 경우에 대하여 2 개씩의 삼각형이 만들어지므로 모두 $4 \times 2 = 8$ (가지)

(ii) 세 변의 길이가 $2,\ 4,\ 2\sqrt{5}$ 인 직각삼각형
: 옆면은 모두 4 개이고, 각각의 옆면에 대하여 삼각형은 4 개씩 생기므로 만들 수 있는 삼각형은 모두 $4 \times 4 = 16$ (가지)

(iii) 세 변의 길이가 $2,\ 2\sqrt{5},\ (\sqrt{2^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{6})$ 인 삼각형
: 그런데 이 경우는 가장 긴 변의 길이가 $2\sqrt{5}$ 가 아니라 $2\sqrt{6}$ 이므로 조건에 맞는 삼각형을 만들 수 없다.

따라서 (i), (ii), (iii) 에서 $8 + 16 = 24$ (가지) 이다.