단원 종합 평가

1. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기 중에서 옳은 문제의 번호를 모두 찾아 다음 그림판에서 색칠하면 태봉이가 제일 좋아하는 숫자가 나타난다. 그 수는 무엇인지 구하여라.

4	6	3
5	1	2
6	4	2
4	5	1
6	3	4

보기

- $\bigcirc A \cup A^c = \emptyset$
- $\bigcirc A \cap A^c = \emptyset$
- \bigcirc $(A^c)^c = A$
- $\textcircled{a} U A = A^c$
- \bigcirc $A B = A \cup B^c$
- B $B A = B \cap A^c$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

- $\ \, \boxdot A \cup A^c = U$
- ② A B = A ∩ B^c
 옳은 것은 ②, ②, ②, ③으로
 그림판에 색칠하면 다음 그림
 과 같다.

따라서 태봉이가 제일 좋아하 는 숫자는 2이다.

4	6	3
5	1	2
6	4	2
4	5	1
6	3	4

집합 A = {a, b, c, d, e, f, g} 일 때, a, e 를
 반드시 원소로 가지는 A 의 부분집합의 개수를
 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 32 개

해설

A 의 부분집합 중 원소 a, e 를 포함한 것이므로 $\{b, c, d, f, g\}$ 의 부분집합에 a, e 를 첨가한 것 과 같다.

따라서 $\{b,\ c,\ d,\ f,\ g\}$ 의 부분집합의 개수는 $2^5=32$ (개)이다.

집합 A = {2, 4, 6, 8, 10, 12} 에서 원소 2 는
 포함되고 동시에 원소 10 은 포함하지 않는
 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

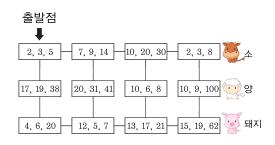
➢ 정답: 16 개

해설

집합 A 에서 원소 2 와 10 을 제외한 부분집합의 개수와 같다.

 $2^4 = 16$

4. 모범이는 출발점에서 시작하여 만나는 네모 칸에 들어 있는 세 수가 각각 '서로소' 이면 '오른쪽' 으로 한 칸을 움직이고, 그렇지 않으면 '아래쪽' 으로 한 칸을 움직여 지나간다고 한다. 모범이가 도착한 곳에서 만나는 동물을 말하여라. 이때, 한 번 지나간 길은 다시 지나지 않는다.



[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 돼지



- **5.** a 와 12 의 공배수가 12 의 배수와 같을 때, 다음 중 a의 값이 될 수 없는 것은? [배점 3, 중하]
 - \bigcirc 2

- ② 4 ③ 6 ④ 12

해설

a 와 12 의 공배수가 12 의 배수와 같다는 것은 a와 12 의 최소공배수가 12 이라는 뜻이므로 a 와 12 의 최소공배수가 12 가 나오기 위해서는 a 가 12 의 약수가 되어야 한다.

24 는 12 의 약수가 아니고 a 가 24 가 될 경우 24 와 12 의 최소공배수는 24 이므로 24 가 아니다.

- **6.** 다음 중에서 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]
 - ① $11001_{(2)} = 5^2$
 - ② $2^5 = 100000_{(2)}$
 - $3 14 < 1111_{(2)}$
 - ④ $1110_{(2)}$ 보다 1 큰 수는 $1111_{(2)}$ 이다.
 - ⑤ 짝수를 이진법으로 나타내면 일의 자리 숫자가 1이다.

해설

- ① $11001_{(2)} = 25 = 5^2$
- $2^5 = 1 \times 2^5 = 100000_{(2)}$
- $31111_{(2)} = 15 > 14$
- $\textcircled{4} 1110_{(2)} + 1 = 14 + 1 = 15 = 1111_{(2)}$
- ⑤ $2 = 10_{(2)}$ 이므로 짝수의 일의 자리 숫자는 0이다.

7. 다음 수를 약수의 개수가 적은 것부터 차례대로 기호를 써라.

360

© 1125

© 384

€ 244

[배점 3, 중하]

- 답:
- 답:
- 답:
- 답:

▷ 정답: ②

▷ 정답 : □

▷ 정답 : □

▷ 정답: Э

해설

- ① 24 개
- ⓑ 12개
- © 16개
- ⓐ 6개

- **8.** 전체집합 $U = \{x | x \vdash 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x$ 는 짝수 $\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은? [배점 4, 중중]
 - ① $A \cap B = \{3\}$
- $\bigcirc A B = \{2, 4, 6\}$
- ③ $B \cap A^c = \{2, 3, 5\}$ ④ $A^c \cap B^c = \{2, 9\}$
- $(A \cup B)^c = \{1, 9\}$

해설

 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, A{2,4,6,8}, $B = \{2,3,5,7\}$ 이므로

- ① $A \cap B = \{2\}$
- \bigcirc $A B = \{4, 6, 8\}$
- ③ $B \cap A^c = \{3, 5, 7\}$
- $A^c \cap B^c = \{1, 9\}$

9. 두 집합 $A = \{x | x \in 120 \text{ 이하의 } 5 \text{의 배수}\}, B =$ $\{x|x$ 는 120 이하의 8의 배수 $\}$ 에 대하여 $n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

답:

➢ 정답: 36

해설

 $n(A) = 24, n(B) = 15, n(A \cap B) = 3$ 이므로 $n(A \cup B) = 24 + 15 - 3 = 36$

10. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 2를 반드시 포함하고 n 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16 개 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

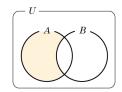
 $2^{(1, 2, n)}$ 제외한 원소의 개수) = $2^{n-3} = 16 = 2^4$: n = 7

- 11. 집합 A = {0, 1, 2, 3, {0, 1}, ∅} 에 대하여 다음중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]
 - ① $\varnothing \in A$
- ② $\{0, 1\} \in A$
- ③ $\{0, 3\} \subset A$
- $\{0\} \in A$
- \bigcirc $\varnothing \subset A$



 $\{0\} \subset A$

12. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 50, n(A) = 20, n(B) = 20, n(A^c \cap B^c) = 12$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 원소의 개수를 구하여라.



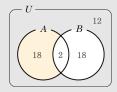
[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 18개

해설

각 집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음 그림과 같으므로 18이다.



13. 어떤 자연수로 300 을 나누면 12 가 부족하고 200 을 나누면 8 이 부족하고, 100 을 나누면 4 가 부족하다고 한다. 이러한 자연수 중에서 가장 큰 것을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

➢ 정답: 104

해설

300 + 12 = 312, 200 + 8 = 208, 100 + 4 = 104 의 최대공약수는 104 이다.

- **14.** 세 자연수 *A*, 54, 126 의 최대공약수가 18 일 때, 다음 중 *A* 가 될 수 없는 것은? [배점 4, 중중]
 - ① 18
- ②30
- ③ 36

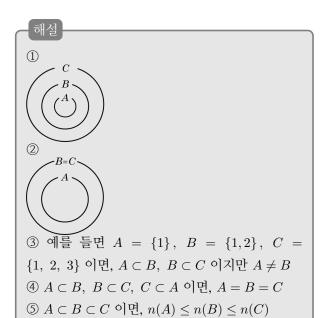
- 90
- ⑤ 144

해설

세 자연수 A, 54, 126 의 최대공약수가 18 이므로 A 는 약수로 18 을 가진다.

따라서 18 을 약수로 갖지 않는 ② 30 은 A 가 될 수 없다.

- **15.** 세 집합 *A*, *B*, *C* 에 대하여 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개) [배점 5, 중상]
 - ① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
 - ② $A \subset B$, B = C 이면 $A \subset C$ 이다.
 - $\textcircled{3}A \subset B, \ B \subset C$ 이면 A = B 이다.
 - ④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 A = C 이다.
 - ⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 n(A) < n(B) < n(C) 이다.



16. 축구를 좋아하는 학생이 21 명, 농구를 좋아하는 학생이 15 명, 축구와 농구를 모두 좋아하는 학생은 9 명, 모두 싫어하는 학생은 6 명이다. 이 때, 축구만 싫어하거나 농구를 좋아하는 학생은 모두 몇 명인지 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답 : 21 명

해설

 $n\left(A\right)=21, n\left(B\right)=15, n\left(A\cap B\right)=9, n(\left(A\cup B\right)^{c})=6$ 이다. $n\left(A^{c}\cup B\right)=n\left(B\right)+n(\left(A\cup B\right)^{c})=15+6=21$ 이다.

- **17.** 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
 - \bigcirc n(A) < n(B) 이면 $A \subset B$ 이다.
 - \bigcirc A = B 이면 n(A) = n(B) 이다.

[배점 5, 중상]

- ① ①
- **②**C
- 3 🗈

- 4 C, C
- \bigcirc \bigcirc , \bigcirc , \bigcirc

해설

- ① $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$ 라고 하면 n(A) < n(B) 이지만 $A \not\subset B$ 이다.
- © $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3\}$ 라고 하면 n(A)=n(B) 이지만 $A\neq B$ 이다.

18. A 반 학생 60 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 33 명, 영어를 좋아하는 학생은 30 명이고, 수학과 영어 중 한 과목만 좋아하는 학생은 29 명이라고 한다.
이때, 수학도 영어도 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.
[배점 5, 중상]

답:

➢ 정답: 14명

해설

수학을 좋아하는 학생의 수 : n(A) = 33, 영어를 좋아하는 학생의 수 : n(B) = 30 $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29$, $n(A \cap B) = (33 + 30 - 29) \div 2 = 17$, $n(A \cup B) = 46$ $\therefore n(U) - n(A \cup B) = 14$ (명)

- **19.** 자연수 $360 \times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 모두 구하시오.(단, n 은 160 미만의 자연수이다.) [배점 5, 중상]
 - ▶ 답:
 - ▶ 답:
 - ▶ 답:
 - ▷ 정답: 10
 - ▷ 정답: 40
 - ➢ 정답: 90
 - 해설

 $360 \times n = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times n = m^2$ 이라 하면 가장 작은수는 $n=2 \times 5$

따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는

- $2 \times 5 = 10$
- $2 \times 5 \times 2^2 = 40$
- $2 \times 5 \times 3^2 = 90$
- ∴ 10, 40, 90

- 20. 9 로 나누면 나머지가 8, 8 로 나누면 나머지가 7, 7
 로 나누면 나머지가 6, 6 으로 나누면 나머지가 5, 5
 로 나누면 나머지가 4 인 자연수 중에서 최소의
 자연수를 구하여라. [배점 5, 중상]
 - ▶ 답:
 - ➢ 정답: 2519
 - 해설

조건을 만족하는 수는 (9, 8, 7, 6, 5 의 공배수)-1 의 꼴이고

9, 8, 7, 6, 5 의 최소공배수는 2520 이다. 따라서 최소의 자연수는 2520 - 1 = 2519 이다.

- **21.** 두 자연수 *a*, *b* 의 최대공약수는 24 이다. *a*, *b*, 32 의 공약수를 모두 구하여라. [배점 5, 중상]
 - ▶ 답:
 - ▶ 답:
 - ▶ 답:
 - ▶ 답:
 - ▷ 정답: 1
 - ▷ 정답: 2
 - ▷ 정답: 4
 - ▷ 정답: 8
 - 해설

a, b 의 공약수는 24의 약수이므로

- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
- 32 의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32
- 따라서 a, b, 32 의 공약수는 1, 2, 4, 8 이다.

- **22.** 두 자연수 a, b 에 대하여 $2 \times 5^a \times 11^b$ 의 약수가 12 개일 때, a + b 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]
 - 답:
 - ➢ 정답: 3
 - 해석

 $(1+1) \times (a+1) \times (b+1) = 12$

 $(a+1)\times(b+1)=6$

a+1=2, b+1=3 $\Xi = a+1=3, b+1=2$

- a = 1, b = 2 또는 a = 2, b = 1
- a + b = 1 + 2 = 3

23. 집합 $A_n = \{x | x$ 는 n의 약수, n은 자연수 $\}$ 일 때, $(A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = A_6 \text{ 을 만족하는 } n \text{ 의 값을 모두}$ 찾아라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

▷ 정답: 3

▷ 정답: 6

해설

 $(A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = (A_n^c \cap A_6) \cup A_n = (A_6 - A_n) \cup A_n$

위의 식을 보면,

 $A_n \subset A_6$ 이므로,

6 의 약수의 집합에 포함될 수 있는 약수의 집합은 1,2,3,6

24. $n(\{0,\emptyset,\{0,2\},\{1\}\}) \times n(\{0,1\}) - n(\emptyset)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

 $n(\left\{\left\{0\right\},\varnothing,\left\{0,2\right\},\left\{1\right\}\right\})\times n(\left\{0,1\right\})-n(\varnothing)=4\times$ 2-0=8

25. 1 학년 1 반 학생 45 명 중 수박을 좋아하는 학생이 35 명, 자두를 좋아하는 학생이 27 명이다. 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답 : 최댓값 : 27명

▷ 정답 : 최솟값 : 17 명

해설

1 학년 1 반의 학생의 집합을 U , 수박을 좋아하는 학생의 집합을 A , 자두를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 두면, 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$ 이고,

n(U)=45, n(A)=35, n(B)=27 이다. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\leq 45$ 이므로, $17\leq n(A\cap B)\leq 27$

따라서 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값은 각각 27 명과 17 명

- **26.** 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.
 - ullet 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
 - \bullet $a_1=1$, $x\in A$ 이면, $\frac{3}{2}\times x\in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

ightharpoonup 정답: $rac{141}{16}$

해설

 $a_1=1$ 이면 $a_2=\frac{3}{2}\times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$$\left\{ a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \right\}$$

$$\left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \cdots, (\frac{3}{2})^{(n-1)} \times a_1 \right\}$$

$$a_2 = \frac{3}{2}, \ a_3 = \frac{9}{4}, \ a_5 = \frac{81}{16} \ \text{olth.}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$$

27. 전체집합 U 의 두 부분집합 A,B 에 대하여 $n(U)=34 \;,\; n(A^c\cap B^c)=11,\; n(B-(A\cap B)^c)=6$ 일 때, $n((A\cup B)-(A\cap B))$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

n(U)=34 이고 $n(A^c\cap B^c)=11$ 이면, $n(A\cup B)=23$,

 $B-(A\cap B)^c=A\cap B$ 이므로 $n(B-(A\cap B)^c)=n(A\cap B)=6$,

$$\therefore n((A \cup B) - (A \cap B)) = 23 - 6 = 17$$

 $egin{aligned} {\bf 28.} & 11_{(2)} < A \leq 10011_{(2)} \ \oplus \ {
m PT}$ 만족하는 자연수 A 중 소수는 몇 개인지 구하여라. [배점 $5,\ {
m Vol}$]

▶ 답:

▷ 정답: 6개

해설

 $11_{(2)}=3,\ 10011_{(2)}=19$ $3 < A \le 19$ 인 소수는 5, 7, 11, 13, 17, 19 로 6 개이다.

29. 가로 18cm , 세로 27cm , 높이 36cm 인 직육면체
 모양의 나무를 잘라서 여러 개의 정육면체 모양을
 만들려고 한다. 만들 수 있는 가장 큰 정육면체
 하나의 부피를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 729 cm³

해설

가로 $18\mathrm{cm}$, 세로 $27\mathrm{cm}$, 높이 $36\mathrm{cm}$ 의 최대공약 수는 $9\mathrm{cm}$ 이므로

만들 수 있는 가장 큰 정육면체의 부피= $9 \times 9 \times 9 = 729 (\text{cm}^3)$

30. 집합 $S = \left\{ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{2}, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4 \right\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

• $x \in A$ 이면 $\frac{1}{x} \in A$

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답 : 15 개

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.

 $\left(\frac{1}{4},4\right),\left(\frac{1}{3},3\right),\left(\frac{1}{2},2\right),(1,1)$ 은 역수 관계에 있 는 두 수의 쌍이다.

- (1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : {1} ⇒ 1 개
- (2) 원소의 개수가 2 개인 집합 $\left\{\frac{1}{4},4\right\}, \left\{\frac{1}{3},3\right\}, \left\{\frac{1}{2},2\right\} \Rightarrow 3$ 개
 (3) 원소의 개수가 3 개인 집합 $\left\{\frac{1}{4},1,4\right\}, \left\{\frac{1}{3},1,3\right\}, \left\{\frac{1}{2},1,2\right\} \Rightarrow 3$ 개
- (4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$
- (6) 원소의 개수가 6 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\}$
- (7) 원소의 개수가 7 개인 집합 $\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3,4\right\} \Rightarrow 1$ 개 따라서 집합 A 의 개수는 1+3+3+3+3+1+1=15 (개)

31. $\frac{x-9}{2} = \frac{y}{3}$ 를 만족하는 두 자연수 x,y 의 최소공배수가 45 일 때, x,y 의 최대공약수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

➢ 정답: 3

$$\begin{split} \frac{x-9}{2} &= \frac{y}{3} \rightarrow 3 \times (x-9) = 2 \times y \ , \\ x,y & 의 최소공배수가 45 = 3^2 \times 5 \ , \end{split}$$
위 두 조건을 만족시키는 x,y 의 값은 x=15, y = 9 이다.

∴(x, y 의 최대공약수)= 3

32. 두 자연수 p,q 의 최대공약수를 [p,q] 로 정의할 때, $[[\frac{[p,p]}{[p,q]},q], [\frac{[q,q]}{[p,q]},p]]$ 를 간단히 하여라.

[배점 6, 상중]

답:

▷ 정답: 1

$$\begin{split} & \left[\left[\frac{[p,p]}{[p,q]},q \right], \left[\frac{[q,q]}{[p,q]},p \right] \right] \\ & = \left[\left[\frac{p}{[p,q]},q \right], \left[\frac{q}{[p,q]},p \right] \right] \\ & = \left[\left[\frac{p}{[p,q]},q \right], \left[\frac{q}{[p,q]},p \right] \right] \left(\frac{p}{[p,q]},q \overset{\leftarrow}{\vdash} \text{서로소} \right) \\ & = \left[1,\ 1 \right] \end{split}$$
=1

33. 200 개의 10 원 동전이 일렬로 나란히 놓여 있다. 이 중 처음에는 200 개의 동전 모두를 50 원 동전으로 바꾸고, 두 번째에는 왼쪽에서 짝수 번째에 있는 동전만 10 원 동전으로 다시 바꾸고, 세 번째에는 3 번째, 6 번째, 9 번째, ... 동전 중 10 원 동전인 것은 50 원 동전으로 50 원 동전인 것은 10 원 동전으로 바꾼다. 같은 방법으로 네 번째, 다섯 번째, ..., 200 번째에서는 4 의 배수번 째, 5 의 배수번 째, · · · 200 의 배수번 째 동전의 종류를 바꾼다고 할 때, 마지막에 놓여있는 금액은 처음보다 얼마 늘어나는지 구하여라. [배점 6, 상중]

답:

▷ 정답: 560 원

해설

주어진 조건을 보면 n 번째 동전은 n 의 약수의 개수만큼 뒤집어진다는 것을 알 수 있다.

1 을 제외한 수 중 약수의 개수가 홀수 개인 수는 어떤 수의 제곱이 되는 수이므로,

홀수 번 뒤집어지는 수는 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,196 이다.

따라서, 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144, 169,196 번째 동전만 50 원이 되고 나머지는 모두 10 원이므로

∴(마지막에 놓여있는 금액-처음 놓여있는 금 액) = 14 × 40 = 560 (원)