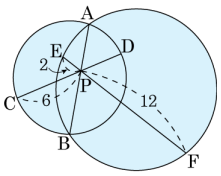
확인학습문제

1. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}$ 위의 한 점 P 를 지나는 두 직선이 원과 만나는 점을 각각 C, D, E, F 라고 할 때, $\overline{PD}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 2, 하중]

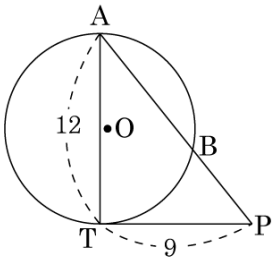
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2 \times 12 = 6 \times \overline{PD}$ $\therefore$ $\overline{PD} = 4$

2. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원 O 의 접선이고, $\overline{AT}$ 는 원 O 의 지름이다. $\overline{AP}$ 가 원 O 와 만나는 점을 B 라고 할 때, $\overline{PB}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{27}{5}$

해설

$\overline{PA}^2 = 12^2 + 9^2$ 이므로 $\overline{PA} = 15$

$\overline{PT}^2 = \overline{PB} \times \overline{PA}$

$9^2 = \overline{PB} \times 15$

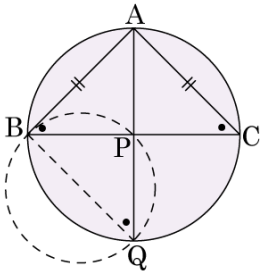
$\therefore$ $\overline{PB} = \frac{81}{15} = \frac{27}{5}$

3. 다음은 그림을 보고, 무엇을 증명하는 과정인지 구하여라.

[가정] $\overline{AB} = \overline{AC}$

[결론] ☐

[증명]



$\angle ABC = \angle ACB$ ($\because$ 이등변삼각형)

$\angle ACB = \angle AQB$

($\because$ $\overset{\frown}{AB}$ 에 대한 원주각)

$\therefore$ $\triangle ABP \backsim \triangle AQB$ (AA 닮음)

$\overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AQ} : \overline{AB}$

$\therefore$ ☐

[배점 3, 하상]

① $\overline{AP}^2 = \overline{AB} \times \overline{AQ}$ ② $\overline{AP}^2 = \overline{AQ} \times \overline{AQ}$

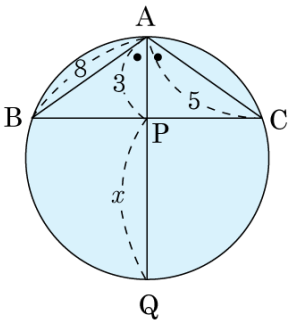
③ $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AQ}$ ④ $\overline{AB}^2 = \overline{AP} \times \overline{AC}$

⑤ $\overline{AB}^2 = \overline{AP} \times \overline{AQ}$

해설

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 를 이용해서 $\overline{AB}^2 = \overline{AP} \times \overline{AQ}$ 를 증명하는 과정이다.

4. 다음 그림에서 x 의 값은?



[배점 3, 하상]

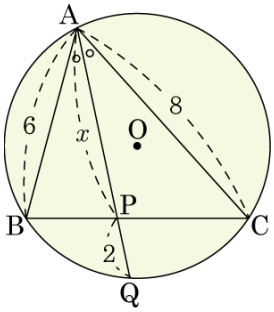
① 9 ② 10 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{25}{3}$ ⑤ $\frac{31}{3}$

해설

$3(3+x)=5\times 8$

$\therefore x=\frac{31}{3}$

5. 다음 그림에서 x 의 값을 구하여라.



[배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x(x+2)=6\times 8$

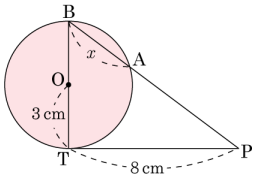
$x^2+2x-48=0$

$(x-6)(x+8)=0$

$x=6,-8$

$\therefore x=6(\because x>0)$

6. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 반지름의 길이가 3cm 인 원 O 의 접선이고 $\overline{PT}=8$cm 일 때, x 의 값은?



[배점 3, 하상]

① 3.6cm ② 3.7cm ③ 3.8cm

④ 3.9cm ⑤ 4cm

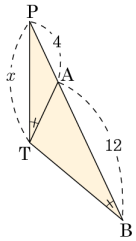
해설

$\angle BTP=90°,\ \overline{BP}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$8^2=(10-x)\times 10$

$\therefore\ x=3.6$

7. 다음 그림에서 $\angle ATP = \angle ABT$ 가 성립할 때, x 값을 구하면?



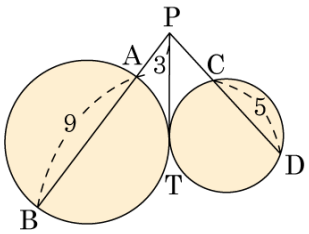
[배점 3, 하상]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$\angle ATP = \angle ABT$ 이 같으므로 $\overline{PT}$ 는 세 점 A, T, B 을 지나는 원의 접선이다.
따라서, $\overline{PT^2} = \overline{PA} \times \overline{PB}$, $x^2 = 4 \times (4+12) = 4 \times 16 = 64$, $x = 8$ 이다.

8. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 두 원에 공통으로 접하고 $\overline{PA} = 3$, $\overline{AB} = 9$, $\overline{CD} = 5$ 일 때, $\overline{PC}$ 의 길이는?



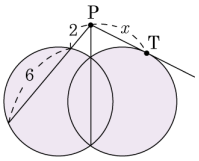
[배점 3, 하상]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$, $\overline{PT}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$
$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$
$\overline{PC} = x$ 라 하면
$3 \times (3+9) = x \times (x+5)$
$(x+9)(x-4) = 0$
$\therefore\ x = 4$

9. 다음 그림에서 x 의 값을 구하여라. (단, $\overline{PT}$ 는 접선이다.)



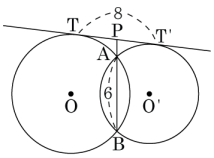
[배점 3, 하상]

▶ 답 :
▷ 정답 : 4

해설

$x^2 = 2(2+6),\ x = 4$

10. 다음 그림에서 $\overline{AB}$는 두 원 O, O′의 공통현이고, $\overleftrightarrow{TT'}$ 는 공통접선이다. $\overline{TT'} = 8$, $\overline{AB} = 6$일 때, $\overline{PA}$의 길이를 구하여라.



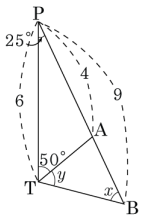
[배점 3, 중하]

▶ 답 :
▷ 정답 : 2

해설

$\overline{PT} = \overline{PT'} = 4$이다.
$\overline{PA}$를 x라 하면
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$이므로
$4^2 = x \times (x+6)$이다.
$x^2 + 6x - 16 = 0$
$(x-2)(x+8) = 0$
$\therefore x = 2\ (\because x > 0)$

11. 다음 그림과 같은 △PTB 에서 $\angle x$, $\angle y$ 의 크기를 각각 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

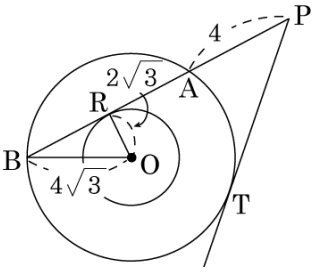
▷ 정답: $x = 50°$

▷ 정답: $y = 55°$

해설

$6^2 = 4 \times 9$, 즉 $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 이므로
다음 그림과 같이 $\overline{PT}$ 는 세 점 A, B, T 를 지나는 원의 접선이다.
$\therefore \angle x = \angle PTA = 50°$
$\angle y + 50° = \angle PAT = 180° - 25° - 50° = 105°$
$\therefore \angle y = 105° - 50° = 55°$

12. 다음 그림에서 반지름의 길이가 각각 $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ 인 두 동심원의 접선 PT, PR 와 두 접점 T, R 가 있다. $\overline{PA} = 4$ 라고 할 때, $\overline{PT}$ 의 길이를 구하면?



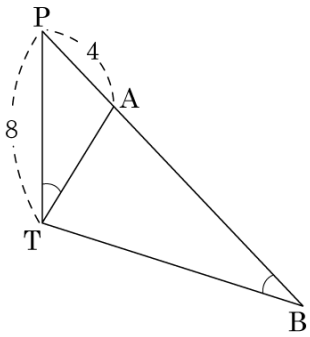
[배점 3, 중하]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$\overline{BR} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48 - 12}$
$= \sqrt{36} = 6$
$\overline{BR} = \overline{AR} = 6$ 이므로
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 에서 $\overline{PT}^2 = 4 \times (4 + 12)$
$\overline{PT}^2 = 64$
$\therefore \overline{PT} = 8 (\overline{PT} > 0)$

13. 다음 그림에서 $\overline{PT} = 8$,$\overline{PA} = 4$ 이고 $\angle ABT = \angle PTA$ 일 때,$\overline{AB}$ 의 길이로 옳은 것은?



[배점 3, 중하]

① 3 ② 12.5

③ 12 ④ 11

⑤ 10.5

해설

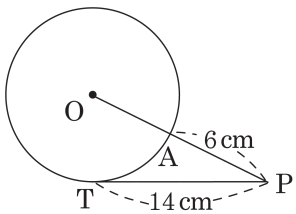
$\angle ABT = \angle PTA$ 이므로 $\overline{PT}$는 세 점 A, B, T 를 지나는 원의 접선이다.

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 이므로

$8^2 = 4 \times (4 + \overline{AB})$, $64 = 16 + 4\overline{AB}$

$\overline{AB} = \frac{48}{4} = 12$

14. 다음 그림은 원 O 의 접선 PT 와 접점 T 를 나타낸 것이다. $\overline{PA} = 6\text{cm}, \overline{PT} = 14\text{cm}$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



[배점 3, 중하]

① $\frac{38}{3}$ cm ② $\frac{40}{3}$ cm ③ $\frac{41}{3}$ cm

④ $\frac{43}{3}$ cm ⑤ $\frac{44}{3}$ cm

해설

반지름의 길이를 x cm 라고 하면

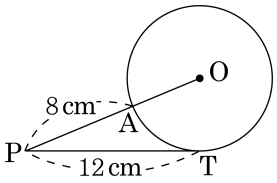
$14^2 = 6(6 + 2x)$

$196 = 36 + 12x$

$12x = 160$

$\therefore x = \frac{40}{3}(\text{cm})$

15. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원 O 의 접선이고 점 T 는 접점이다. $\overline{PA} = 8\,\text{cm}, \overline{PT} = 12\,\text{cm}$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 5 cm

해설

반지름의 길이를 x cm 라고 하면

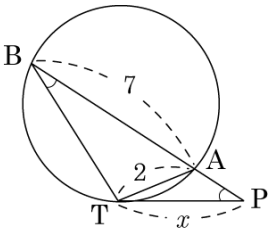
$12^2 = 8(8 + 2x)$

$144 = 64 + 16x$

$16x = 80$

$\therefore x = 5(\text{cm})$

16. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원의 접선이고, $\angle APT = \angle ABT$ 라고 할 때, $\overline{PT}$ 의 길이는 얼마인가?



[배점 3, 중하]

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

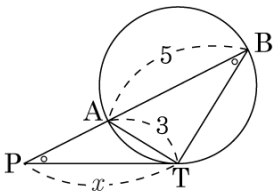
$\angle PTA = \angle ABT$이므로 $\triangle PAT$ 는 이등변삼각형이다.

$\overline{PA} = \overline{AT} = 2$, $x^2 = 2 \times 9$

$x^2 = 18$

$\therefore x = 3\sqrt{2} (\because x > 0)$

17. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원의 접선이고, $\angle APT = \angle ABT$ 이다. $\overline{PT}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: $2\sqrt{6}$

해설

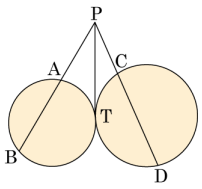
$\angle PTA = \angle ABT$이므로$\triangle PAT$ 는 이등변삼각형이다.

$\overline{PA} = \overline{AT} = 3, x^2 = 3 \times 8$

$x^2 = 24$

$\therefore\ x = 2\sqrt{6} (\because x > 0)$

18. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 두 원의 공통접선이고 $\overline{PA} = 4$, $\overline{PC} = 3$, $\overline{CD} = 9$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이는?



[배점 4, 중중]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 9 ⑤ 12

해설

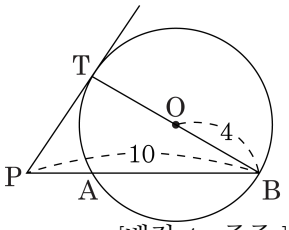
$\overline{AB} = x$ 라 놓으면,

$4(x+4) = 12 \times 3$

$x = 5$

$\therefore \overline{AB} = 5$

19. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원 O 의 접선이고 $\overline{TB}$ 는 원 O 의 지름이다. $\overline{OB} = 4$, $\overline{PB} = 10$ 일 때, $\overline{PA}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{18}{5}$

해설

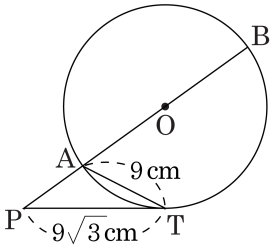
$\triangle PTB$ 에서 $\angle PTB = 90°$ 이므로

$\overline{PT} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

$36 = \overline{PA} \cdot 10 \quad \therefore \overline{PA} = \frac{18}{5}$

20. 다음 그림과 같이 원의 외부에 있는 한 점, P 에서 원 O 에 접선 PT 와 할선 PB 를 그었다. $\angle APT = \angle ATP$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 18 cm

해설

원 O 의 반지름의 길이를 r 이라 하면

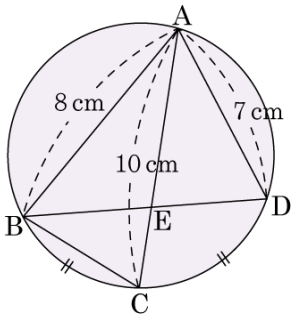
$\left(9\sqrt{3}\right)^2 = 9(9 + 2r)$

$27 = 9 + 2r$

$\therefore r = 9\,(\text{cm})$

(지름) $= 18(\text{cm})$

21. 다음 그림에서 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ 이고, $\overline{AB} = 8\text{cm}$, $\overline{AC} = 10\text{cm}$, $\overline{AD} = 7\text{cm}$ 일 때, $\overline{AE}$ 의 길이는?



[배점 4, 중중]

① 5cm ② 5.4cm ③ 5.6cm

④ 5.8cm ⑤ 6cm

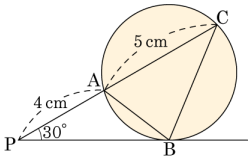
해설

$\overline{AB} \times \overline{AD} = \overline{AE} \times \overline{AC}$

$8 \times 7 = \overline{AE} \times 10$

$\therefore\ \overline{AE} = 5.6$

22. 다음 그림에서 $\overrightarrow{PB}$ 는 원의 접선이고, $\angle BPC = 30°$ 이다. $\overline{PA} = 4\text{cm}$, $\overline{AC} = 5\text{cm}$ 일 때, $\triangle PBA$ 의 넓이는?



[배점 4, 중중]

① 5cm^2 ② $5\sqrt{2}\text{cm}^2$ ③ 6cm^2

④ $6\sqrt{2}\text{cm}^2$ ⑤ $7\sqrt{2}\text{cm}^2$

해설

할선과 접선의 관계에서

$\overline{PB}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PC} = 4 \times (4+5) = 36$

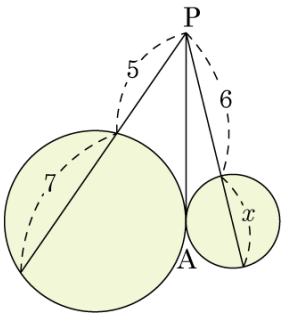
$\therefore\ \overline{PB} = 6(\text{cm})$

점 A 에서 $\overline{PB}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{PA}:\overline{AH} = 2:1$ 이므로 $\overline{AH} = 2(\text{cm})$

$\therefore\ \triangle PBA = \frac{1}{2} \times \overline{PB} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6(\text{cm}^2)$

23. 다음 그림에서 x 의 길이는? [배점 4, 중중]



① 2 ② 3 ③ 4

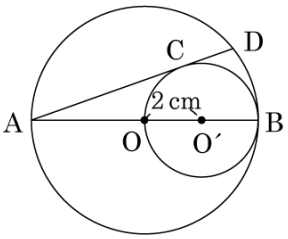
④ 5 ⑤ 6

해설

$6(6+x) = 5(5+7)$

$\therefore\ x = 4$

24. 다음 그림에서 원 O′ 은 원 O 의 중심을 지나며 내접하고, $\overline{AD}$ 는 원 O′ 과 점 C 에서 접한다. $\overline{OO'} = 2\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{AD}$ 의 길이는?



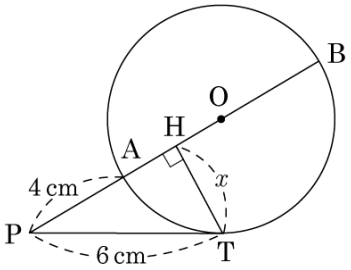
[배점 4, 중중]

① $3\sqrt{2}\,\text{cm}$ ② $4\sqrt{2}\,\text{cm}$ ③ $3\sqrt{5}\,\text{cm}$
④ $\frac{16\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}$ ⑤ $6\sqrt{2}\,\text{cm}$

해설

할선과 접선의 관계에서
$\overline{AC}^2 = \overline{OA}\cdot\overline{AB} = 4 \times 8 = 32$
$\therefore\ \overline{AC} = 4\sqrt{2}(\,\text{cm})$
점 C 와 O′ , D 와 B 를 연결하면
$\angle ACO' = \angle ADB = 90^\circ$, $\angle A$ 는 공통
$\triangle ACO' \backsim \triangle ADB$ (AA 닮음) 이므로
$\therefore\ \overline{AC}:\overline{AD} = \overline{AO'}:\overline{AB}$
$\therefore \overline{AD} = \frac{\overline{AC} \times \overline{AB}}{\overline{AO'}} = \frac{4\sqrt{2} \times 8}{6} = \frac{16}{3}\sqrt{2}(\,\text{cm})$

25. 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원 O 의 접선이고, $\overline{AB}$ 는 원 O 의 지름이다. $\overline{PA} = 4\text{cm}$, $\overline{PT} = 6\text{cm}$ 일 때, 점 T 에서 $\overline{AB}$ 에 이르는 거리를 구하면?



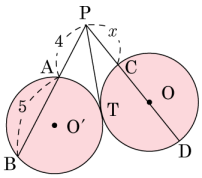
[배점 4, 중중]

① $\frac{30}{13}\,\text{cm}$ ② $\frac{29}{13}\,\text{cm}$ ③ $\frac{28}{13}\,\text{cm}$
④ $\frac{27}{13}\,\text{cm}$ ⑤ $2\,\text{cm}$

해설

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$
$6^2 = 4(4 + 2r)$
따라서, 원의 반지름은 $\frac{5}{2}(\text{cm})$
또, 보조선 $\overline{OT}$ 를 그으면, $\triangle OPT \backsim \triangle TPH$ (AA 닮음)
$\overline{OP}:\overline{PT} = \overline{OT}:\overline{TH}$ 이므로 $4 + \frac{5}{2} : 6 = \frac{5}{2} : x$
$\therefore\ x = \frac{30}{13}(\,\text{cm})$

26. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 두 원 O, O′ 의 공통접선이다. $\overline{PA}=4$, $\overline{AB}=5$ 이고 $\overline{PC}:\overline{CO}=1:2$ 일 때, 원 O 의 넓이는 $\frac{b}{a}\pi$ 라고 한다. 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b는 서로소)



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 41

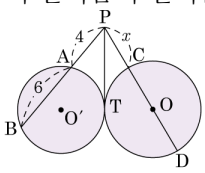
해설

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ $4\times9=x\times5x$, $x^2=\frac{36}{5}$

한편, 원의 넓이는 $\frac{36}{5}\pi$ 이다.

따라서 $a+b=36+5=41$ 이다.

27. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 두 원 O, O′ 의 공통접선이다. $\overline{PA}=4$, $\overline{AB}=6$ 이고 $\overline{PC}:\overline{CO}=1:2$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이는?



[배점 5, 중상]

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$

④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

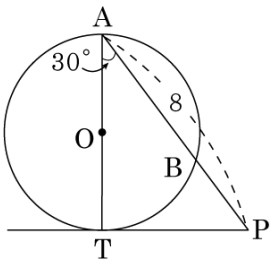
$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$4\times10=x\times5x$

$8=x^2$

$\therefore x=2\sqrt{2}$

28. 다음 그림에서 $\overline{AT}$는 원 O의 지름이고 $\overrightarrow{PT}$는 원 O의 접선이다. $\overline{AP}=8$, $\angle PAT=30°$ 일 때, $\overline{PB}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 2

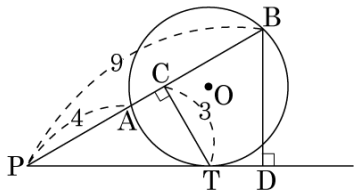
해설

△ATP는 $\angle PAT=30°$인 직각삼각형이므로

$\overline{PT}=4$ $\therefore\ \overline{PT}^2=\overline{PB}\times\overline{PA}$

$4^2=8\times\overline{PB}$ $\therefore\ \overline{PB}=2$

29. 다음 그림과 같이 원 O의 외부에 있는 한 점 P에서 이 원에 그은 접선과 할선이 원 O와 만난 점을 각각 T, A, B 라 하고, 점 T에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 $\overrightarrow{PT}$ 에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{PA}=4$, $\overline{PB}=9$, $\overline{TC}=3$ 일 때, $\overline{BD}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 4.5

해설

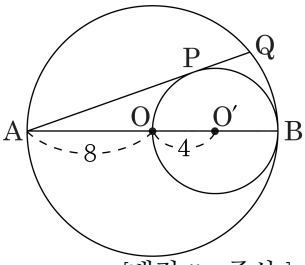
$\overline{PT}^2 = 4 \times 9 = 36$ $\therefore \overline{PT} = 6$

$\triangle TPC \backsim \triangle BPD$ ($\because$ AA 닮음) 이므로

$\overline{TP} : \overline{BP} = \overline{TC} : \overline{BD}$

$6 : 9 = 3 : \overline{BD}$ $\therefore \overline{BD} = 4.5$

30. 다음 그림과 같이 점 A에서 원 O′ 에 그은 접선 AP 와 원 O 와의 교점을 Q 라 할 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?



[배점 5, 중상]

① $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ ② $\frac{17}{3}\sqrt{2}$ ③ $\frac{25}{3}\sqrt{2}$

④ $\frac{32}{3}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{2}$

해설

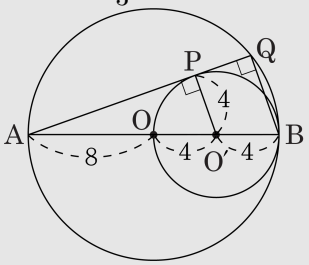
$\overline{AP} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$\triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$에서

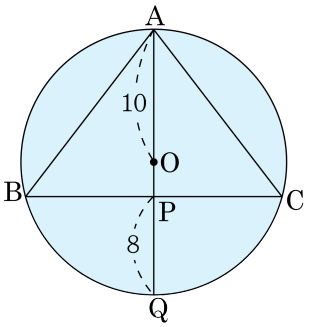
$12 : 16 = 8\sqrt{2} : \overline{AQ}$

$12\overline{AQ} = 128\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AQ} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$



31. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 10 인 원 O에 내접하는 이등변 삼각형 ABC 에 대하여 $\overline{PQ} = 8$일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



[배점 5, 중상]

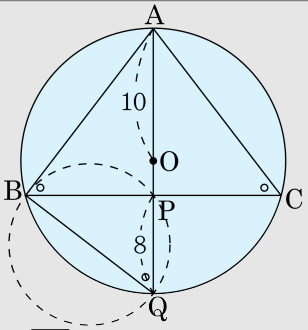
① $36\sqrt{2}$ ② $42\sqrt{17}$ ③ $48\sqrt{6}$

④ 52 ⑤ $52\sqrt{3}$

해설

그림과 같이 보조선 $\overline{BQ}$ 를 연결하면

$\angle ACB = \angle AQB = \angle ABP$



이 때, $\overline{AQ} = 20$ 이므로 $\overline{AP} = 12$

$\therefore \overline{AB}^2 = \overline{AP} \times \overline{PQ} = 12 \times 20 = 240$

$\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{15}$

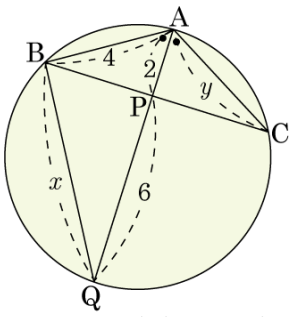
선분 BC 는 $\overline{OP}$ 에 의해 수직이등분되므로 직각삼각형 $\triangle ABP$ 에서

$\overline{BP} = \sqrt{(4\sqrt{15})^2 - 12^2} = 4\sqrt{6}$ $\therefore \overline{BC} = 8\sqrt{6}$

따라서, 구하는 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{6} \times 12 = 48\sqrt{6}$ 이다.

32. 다음 그림에서 $x + y$ 의 값은?



[배점 5, 중상]

① $5 + 2\sqrt{10}$ ② $3 + 8\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3} + 4$

④ $6 + 3\sqrt{6}$ ⑤ $7 + 2\sqrt{2}$

해설

$x^2 = 8 \times 6$

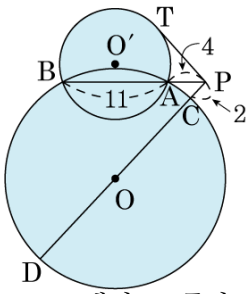
$x = 4\sqrt{3}$

$4y = 2 \times 8$

$y = 4$

$\therefore x = 4\sqrt{3}$, $y = 4$

33. 다음 그림과 같이 두 원이 두 점에서 만날 때, 원 O 의 넓이는?



[배점 5, 중상]

① 121π ② 144π ③ 169π

④ 196π ⑤ 225π

해설

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

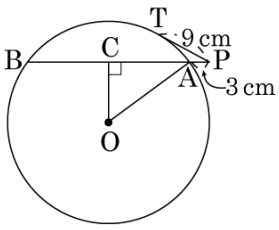
$4 \times 15 = 2 \times (2 + 2r)$

$60 = 2 \times (2 + 2r)$

$r = 14$

$\therefore \pi(14)^2 = 196\pi$

34. 다음 그림은 반지름의 길이가 15 cm 인 원 O 에 접선과 할선을 작도한 것이다. $\overline{PT} = 9\,\text{cm}$, $\overline{PA} = 3\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{OC}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 9 cm

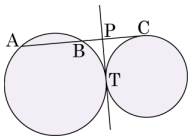
해설

$\overline{CA} = x$ 라 하면

$3(3 + 2x) = 9^2$ $\therefore x = 12$ (cm)

$\overline{OC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ (cm)

35. 다음 그림에서 점 T 는 두 원이 외접하는 접점이고 점 C 는 현 AB 를 지나는 직선이 다른 원과 외접하는 점이다. $\overline{PB} = 1$, $\overline{PC} = 2$ 일 때, 현 AB 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

점 P 에서 한 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $\overline{PC} = \overline{PT} = 2$

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ 이므로 $4 = 1 + \overline{AB}$ $\therefore \overline{AB} = 3$