확인학습문제

1. 축의 방정식이 $x = 3$ 이고, 점 $(2,\ 5)$ 를 지나고, y 절편이 37 인 이차함수의 최솟값을 구하여라.

[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

축의 방정식이 $x = 3$ 이므로

$y = a(x-3)^2 + q$

점 $(2,\ 5)$ 와 y 절편 $(0,\ 37)$ 를 지나므로

$5 = a + q,\ 37 = 9a + q$

$a = 4,\ q = 1$

$\therefore\ y = 4(x-3)^2 + 1$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최솟값은 1 이다.

2. 이차함수 $y = 2x^2 + bx + c$ 가 직선 $x = 2$를 축으로 하고 최솟값 -3을 가질 때, 상수 b, c 의 값을 각각 구하여라.

[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $b = -8$

▷ 정답 : $c = 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 이차함수의 식은

$y = 2(x-2)^2 - 3$ 이고, 전개하면

$y = 2(x-2)^2 - 3 = 2(x^2 - 4x + 4) - 3 = 2x^2 - 8x + 5$

이다.

$y = 2x^2 - 8x + 5$ 이므로 $b = -8, c = 5$ 이다.

3. 지면으로부터 초속 30m 로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 30x$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3 초

▷ 정답 : 45 m

해설

$y = -5x^2 + 30x$ 에서 $y = -5(x-3)^2 + 45$ 이다.

따라서 $x = 3$ 일 때, y 는 최댓값 45 를 갖는다.

4. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, x 초 후의 축구공의 높이를 ym 라고 하면 $y = -x^2 + 6x$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

[배점 2, 하중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9 m

해설

$y = -x^2 + 6x$ 에서 $y = -(x-3)^2 + 9$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 9m 이다.

5. $x = -1$ 일 때, 최댓값 3 을 갖고 한 점 $(1, -1)$ 을 지나는 포물선의 식은? [배점 3, 하상]

① $y = -2(x+1)^2 - 4$

② $y = (x-2)^2 - 3$

③ $y = -2(x-1)^2 + 3$

④ $y = -(x+1)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(-1, 3)$ 이므로 $y = a(x+1)^2 + 3$
$(1, -1)$ 을 대입하면 $-1 = 4a + 3$
$a = -1$
$\therefore y = -(x+1)^2 + 3$

6. 이차함수 $y = x^2 + 4x + 1$ 의 최솟값을 구하면? [배점 3, 하상]

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ -5

해설

$y = x^2 + 4x + 1$
$= (x+2)^2 - 3$
$x = -2$ 일 때, 최솟값은 -3 이다.

7. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 12 인 직사각형의 넓이를 y 라고 할 때, y 의 최댓값을 구하면? [배점 3, 하상]

① 36 ② 16 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

가로의 길이를 x 라고 두면 세로의 길이는 $12 - x$ 이다.
$y = x \times (12 - x)$
$= -x^2 + 12x$
$= -(x^2 - 12x + 36) + 36$
$= -(x-6)^2 + 36$
따라서 18 이 최댓값이다.

8. 다음 [보기] 중 최솟값이 같은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = -(x+1)^2 - 3$ ㉡ $y = 2(x-1)^2 - 3$
㉢ $y = -3x^2 - 6x - 6$ ㉣ $y = x^2 - 3$
㉤ $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 + 3$ ㉥ $y = -x^2 + 3$

[배점 3, 하상]

① ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ ② ㄱ, ㄷ
③ ㄴ, ㄹ ④ ㅁ, ㅂ
⑤ ㄱ, ㅂ

해설

$y = a(x-p)^2 + q$ 에서 a 의 부호가 양이고, q 의 값이 같은 것을 찾는다.

9. 다음 이차함수 중에서 최솟값이 가장 작은 것은?

[배점 3, 하상]

① $y=2x^2$ ② $y=x^2+2x+1$

③ $y=2x^2+4x+7$ ④ $y=7x^2-2$

⑤ $y=\frac{1}{3}(x+3)^2-5$

해설

① $y=2x^2$: 최솟값은 0 이다.

② $y=x^2+2x+1, y=(x+1)^2$: 최솟값은 0 이다.

③ $y=2x^2+4x+7=y=2(x+1)^2+5$: 최솟값은 5 이다.

④ $y=7x^2-2$: 최솟값은 -2 이다.

⑤ $y=\frac{1}{3}(x+3)^2-5$: 최솟값은 -5

10. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

[배점 3, 하상]

① $y=-2x^2+1$ ② $y=-x^2+x+1$

③ $y=-(x-1)^2+4$ ④ $y=1-x^2$

⑤ $y=(x-1)(x+2)$

해설

그래프가 아래로 볼록해야 최솟값을 가진다.

11. 이차함수 $y=x^2+4x-m$ 의 최솟값이 4 일 때, 상수 m 의 값을 고르면?

[배점 3, 중하]

① -10 ② -8 ③ -4

④ 0 ⑤ 2

해설

$y=(x+2)^2-4-m$ 에서 $-4-m=4$ $\therefore m=-8$

12. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2$ 의 최댓값을 구하면?

[배점 3, 중하]

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0

④ -2 ⑤ 2

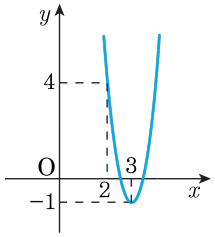
해설

$0=-\frac{1}{2}(x-2)^2$

$\therefore x=2$

즉, $x=2$ 일 때, 최댓값 0

13. 다음 그림은 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 그래프이다. apq 의 값을 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -15

해설

꼭짓점 좌표가 $(3, -1)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 1$

$y = a(x-3)^2 - 1$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4 = a - 1 \quad \therefore a = 5$

$y = 5(x-3)^2 - 1$

$\therefore a = 5,\ p = 3,\ q = -1$

$\therefore apq = 5 \times 3 \times (-1) = -15$

14. 지면으로부터 초속 20m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면, $h = 20t - 5t^2$ 인 관계식이 성립한다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 초후

▷ 정답 : 20 m

해설

$h = 20t - 5t^2$

$= -5(t-2)^2 + 20$

따라서 $t = 2$ 일 때, 최댓값 20을 갖는다.

15. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2$ 의 최솟값이 2 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 + ax + 2$

$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$

$-\frac{a^2}{4} + 2 = 2$

$\therefore a = 0$

16. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 6$이 $x = 1$일 때 최솟값 5를 가진다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라. (단, $a > 0$) [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = ax^2 + bx + 6$

$= a(x-1)^2 + 5$

($\because x = 1$일 때, 최솟값 5를 가진다.)

$= a(x^2 - 2x + 1) + 4$

$= ax^2 - 2ax + a + 4$

$\therefore a + 4 = 6,\ -2a = b$

$\therefore a = 2, b = -4$

$\therefore\ a + b = 2 + (-4) = -2$

17. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 두 점 $(1,\ 8)$, $(-1,\ 4)$ 를 지날 때, 이 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은? [배점 3, 중하]

① 최댓값 : 4

② 최솟값 : 4

③ 최댓값 : 1, 최솟값 : 3

④ 최댓값 : 6

⑤ 최솟값 : 1

해설

$y = x^2 + 2ax + b$가 두 점 $(1,\ 8)$, $(-1,\ 4)$ 를 지나므로

$8 = 1 + 2a + b, 4 = 1 - 2a + b$

두 식을 연립하여 풀면

$a = 1, b = 5$

$\therefore y = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값은 4

18. 이차함수 $y = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 6$ 의 치역은? [배점 4, 중중]

① $\{y \mid y \geq -3\}$ ② $\{y \mid y \leq 3\}$

③ $\{y \mid y \geq -6\}$ ④ $\{y \mid y \leq -6\}$

⑤ $\{y \mid y \leq 0\}$

해설

$y = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - 6 = -\frac{2}{3}(x-3)^2$

$x = 3$ 일 때, 최댓값은 0

따라서 치역은 $\{y \mid y \leq 0\}$ 이다.

19. 세 점 $(1,\ -12)$, $(0,\ -5)$, $(-1,\ 0)$ 을 지나는 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 : 4

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에 세 점을 대입한다.

$(0,\ -5)$ 를 대입하면 $c = -5$

$(-1,\ 0)$ 을 대입하면 $a - b + c = 0 \cdots$ ㉠

$(1,\ -12)$ 를 대입하면 $a + b + c = -12 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면

$a = -1,\ b = -6$

$y = -x^2 - 6x - 5 = -(x+3)^2 + 4$

$x = -3$ 일 때 최댓값 4 를 가지며 최솟값은 없다.

20. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때, 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

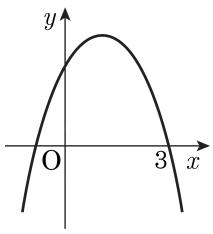
모양이 같으므로 $a = -\frac{1}{2}$

꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 3)$,

따라서 $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

$\therefore\ a = -\frac{1}{2},\ b = -2,\ c = 1$

21. 다음 그림은 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 3$ 의 그래프이다. 이 함수의 최댓값은?



[배점 4, 중중]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$y = -x^2 - 2ax + 3$ 이 점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = -9 - 6a + 3,\ a = -1$

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$

$x = 1$ 일 때, 최솟값은 4 이다.

22. 다음 치역이 $\{y|y \geq -3\}$ 인 이차함수를 모두 골라라.

ㄱ. $y = 3(x+1)^2 - 6$ ㄴ. $y = x^2 + 4$
ㄷ. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$ ㄹ. $y = x^2 - 4x + 5$
ㅁ. $y = x^2 - 2x - 2$ ㅂ. $y = -2x^2 - 4x - 1$

[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㄷ

▷ 정답: ㅁ

해설

ㄷ. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{4}(x-4)^2 - 3$

ㄹ. $y = (x-2)^2 + 1,\ \{y|y \geq 1\}$

ㅁ. $y = (x-1)^2 - 3$

ㅂ. $y = -2(x+1)^2 + 1,\ \{y|y \leq 1\}$

23. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면? [배점 4, 중중]

① 16 ② 20 ③ 36 ④ 55 ⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$b = \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8-a)$

$= -a^2 + 8a$

$= -(a^2 - 8a + 16 - 16)$

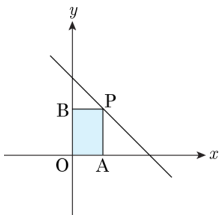
$= -(a-4)^2 + 16$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.

따라서 $ab = 64$ 이다.

24. 다음 그림과 같이 일차함수 $y = -x + 4$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형 OAPB 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

A 의 좌표를 $(t,\ 0)$ 이라고 하면 P 의 좌표는 $(t,\ -t+4)$ 이고 B 의 좌표는$(0,\ -t+4)$

$\therefore \square OAPB = t \times (-t+4) = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$

$t = 2$ 일 때, 넓이의 최댓값4

25. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24-x)$ cm 라 하면

$y = x(24-x)$

$= -x^2 + 24x$

$= -(x-12)^2 + 144$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$\therefore x = 12,\ 24 - x = 12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm