

확인학습문제

1. 다음 이차함수 중 최댓값이 3 인 것은?

[배점 2, 하중]

① $y = 2(x - 1)^2 + 3$

② $y = -x^2 + x + 3$

③ $y = -(x - 3)^2 + 1$

④ $y = -3(x + 2)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 3$

해설

이차항의 계수가 음수이면서 꼭짓점의 y 좌표가 3 인 것을 찾는다.

2. 지면으로부터 15m 높이에서 초속 40m 로 쏘아 올린 모형 로켓의 x 초 후의 지면으로 부터의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x + 15$ 인 관계가 성립한다. 이 로켓이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: 4 초

▶ 정답: 95 m

해설

$y = -5x^2 + 40x + 15$ 에서 $y = -5(x - 4)^2 + 95$ 이다.

따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 95 를 갖는다.

3. x 가 정수일 때, $y = 2x^2 - 3x + 6$ 의 최솟값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▶ 정답: 5

해설

$y = 2x^2 - 3x + 6 = 2(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{39}{8}$
 x 가 정수이므로 $x = 1$ 일 때, 최솟값 5 를 갖는다.

4. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 8$ 의 치역을 구하면?

[배점 3, 하상]

① $\{y|y \leq 4\}$ ② $\{y|y \geq 4\}$ ③ $\{y|y \geq 8\}$

④ $\{y|y \leq 8\}$ ⑤ $\{y|y \geq 2\}$

해설

$y = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$
 $x = 2$ 일 때, 최솟값 4 를 가지므로
 치역은 $\{y|y \geq 4\}$ 이다.

5. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

[배점 3, 하상]

① -14 ② 14 ③ -5

④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
 $= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
 $= (x - 3)^2 - 14$
 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

6. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

[배점 3, 하상]

- ① $y = x^2 + x - 1$ ② $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$
 ③ $y = \frac{1}{5}x^2 + 4$ ④ $y = -x^2 - 2x + 1$
 ⑤ $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값을 고르면?

[배점 3, 하상]

- ① -14 ② 14 ③ -5
 ④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
 $= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
 $= (x-3)^2 - 14$
 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

8. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면? [배점 3, 하상]

- ① $\frac{15}{2}$ m ② 8m ③ $\frac{17}{2}$ m
 ④ 3m ⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y \text{ m}^2$, 반지름의 길이를 $x \text{ m}$ 라 하면

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$ 이다.

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$

$= x(15 - x)$

$= -x^2 + 15x$

$= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right)$

$= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4}$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2} \text{ m}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4} \text{ m}^2$ 을 가진다.

9. 이차함수 $y = 2x^2 - 6x - 4$ 는 $x = a$ 일 때 최솟값 b 를 갖는다. $a - b$ 의 값을 구하면? [배점 3, 하상]

① -8 ② -4 ③ 6 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$y = 2x^2 - 6x - 4 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{2} - 4 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{2}$$

아래로 볼록하고 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{17}{2}\right)$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$ 일 때, 최솟값 $-\frac{17}{2}$ 을 갖는다.
 $\therefore a - b = \frac{3}{2} - \left(-\frac{17}{2}\right) = 10$

10. 축이 $x = 2$ 이고, 두 점 $(1, -8)$, $(0, 1)$ 을 지나는 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 최솟값: -11

해설

축이 $x = 2$ 이므로
 $y = a(x - 2)^2 + q$
 두 점 $(1, -8)$, $(0, 1)$ 을 지나므로
 $-8 = a(1 - 2)^2 + q, a + q = -8$
 $1 = a(0 - 2)^2 + q, 4a + q = 1$
 $\therefore a = 3, q = -11$
 $\therefore y = 3(x - 2)^2 - 11$
 따라서 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -11을 갖는다.

11. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 3$ 이 $x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가질 때, $a - m$ 의 값은? [배점 3, 중하]

① -9 ② 6 ③ 3 ④ -3 ⑤ -6

해설

$$y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 - a^2 + 3$$

$x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가지므로
 $a = -3, -a^2 + 3 = m, m = -6$
 $\therefore a - m = -3 - (-6) = 3$

12. 차가 5인 두 수 중에서 그 곱이 최소가 되는 두 수는?

[배점 3, 중하]

① $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$ ② 3, 4 ③ 2, 5
 ④ -1, 5 ⑤ $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

해설

두 수를 각각 $x, x + 5$ 라 하면
 $y = x(x + 5) = x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$
 최소가 되는 x 의 값은 $-\frac{5}{2}$ 이므로
 $x + 5$ 의 값은 $\frac{5}{2}$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 에서 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 이고, 최댓값이 6 일 때 k 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : $k = -9$

해설

$$y = x^2 + 2x + k = (x + 1)^2 - 1 + k$$

그래프는 아래로 볼록하고 $x = 3$ 일 때, 최댓값 6 을 가진다.

$$16 - 1 + k = 6 \quad \therefore k = -9$$

14. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖지 않는 것은? [배점 3, 중하]

- ① $y = -x^2 + 1$ ② $y = -10x^2 - \frac{1}{3}$
 ③ $y = -2(x - 1)^2$ ④ $y = -\left(x - \frac{1}{5}\right)^2$

⑤ $y = 3x^2 + 4$

해설

이차항의 계수가 음수일 때, 최댓값을 가진다.

15. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + k + 1$ 의 최댓값이 15 일 때, k 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 5

해설

$$y = -x^2 + 6x + k + 1$$

$$= -(x - 3)^2 + 9 + k + 1$$

$$= -(x - 3)^2 + k + 10$$

$x = 3$ 일 때, 최댓값 $k + 10$ 을 가지므로

$$k + 10 = 15$$

$$\therefore k = 5$$

16. 이차함수 $y = -2x^2 + 8x + k$ 의 최댓값이 2 일 때, k 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 정답 : -6

해설

$$y = -2x^2 + 8x + k$$

$$= -2(x^2 - 4x + 4 - 4) + k$$

$$= -2(x - 2)^2 + 8 + k$$

$x = 2$ 일 때, 최댓값 $8 + k$ 를 갖는다.

$$\therefore 8 + k = 2, k = -6$$

17. 너비가 40cm 인 양철판을 구부려서 'ㄷ'자 모양의 물 받이를 만들었다. 물받이의 단면적의 넓이가 최대가 되는 높이를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10 cm

해설

양철판의 높이를 x cm 라고 두고 단면적의 넓이를 y cm² 라고 두면

$$y = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x = -2(x^2 - 20x + 100) + 200 = -2(x - 10)^2 + 200 \text{ 이다.}$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최댓값 200 을 가진다.

18. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 1 + k$ 의 최솟값이 4 일 때, k 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

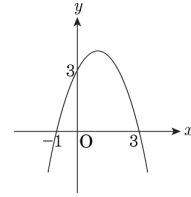
해설

$$y = 2x^2 - 4x + 1 + k = 2(x - 1)^2 - 1 + k$$

최솟값이 4 이므로 $-1 + k = 4$

$$\therefore k = 5$$

19. 다음 그래프에서 최댓값을 구하고, 그 때의 x 의 값을 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : 최댓값 : 4

해설

x 절편이 -1 과 3 이므로

$$y = a(x + 1)(x - 3)$$

점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = a(0 + 1)(0 - 3), a = -1$$

$$y = -(x + 1)(x - 3)$$

$$= -x^2 + 2x + 3$$

$$= -(x - 1)^2 + 4$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

20. 이차함수 $y = (x - 1)(x + 5)$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 그 때의 x 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -2$ 일 때, 최솟값 -9

해설

$$y = (x - 1)(x + 5)$$

$$y = x^2 + 4x - 5$$

$$y = (x + 2)^2 - 9$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 -9 를 가지며 최댓값은 없다.

21. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값 -10 을 가질 때 a, b 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: $a = -3$

▶ 정답: $b = -1$

해설

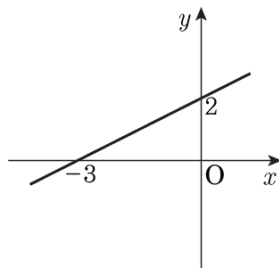
$x = 3$ 일 때, 최솟값 -10 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, -10)$ 이다.

$$y = x^2 + 2ax + b$$

$$= (x - 3)^2 - 10$$

$$= x^2 - 6x - 1 \quad \therefore a = -3, b = -1$$

22. 다음 그래프는 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}ax^2 + bx + 1$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 최댓값: -4

해설

$$a = \frac{2}{3}, b = 2$$

$y = -\frac{1}{2}ax^2 + bx + 1$ 에 a, b 의 값을 대입하면

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$$

$$y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 4$$

$x = 3$ 일 때, 최댓값 4 를 가지며 최솟값은 없다.

23. 이차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + ax$ 의 최댓값이 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + 9$ 의 최솟값과 같을 때, a 의 값은?

[배점 4, 중중]

- ① 2 ② -2 ③ 4 ④ -4 ⑤ 6

해설

$$i) y = \frac{1}{2}ax^2 + ax = \frac{1}{2}a(x + 1)^2 - \frac{1}{2}a$$

따라서, $x = -1$ 일 때 최댓값 $-\frac{1}{2}a$ 를 갖는다.

$$ii) y = 2x^2 + 8x + 9 = 2(x + 2)^2 + 1$$

따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 1 을 갖는다.

i) 의 최댓값과 ii) 의 최솟값이 같으므로 $-\frac{1}{2}a = 1$ 에서 $a = -2$

24. 이차함수 $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ 은 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다고 한다. $a - b$ 의 값을 구하면?

[배점 4, 중중]

- ① -8 ② -5 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$$y = \frac{3}{2}(x^2 + 4x) - 3 = \frac{3}{2}(x + 2)^2 - 9$$

$$a = -2, b = -9$$

그러므로 $a - b = 7$ 이다.

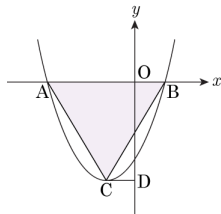
25. 이차함수 $y = x^2 - 2(m+1)x + 4m$ 의 최솟값을 a 이라 할 때, a 의 최댓값은? [배점 4, 중중]

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2(m+1)x + 4m \\ &= \{x^2 - 2(m+1)x + (m+1)^2 - (m+1)^2\} + 4m \\ &= \{x - (m+1)\}^2 - (m+1)^2 + 4m \\ \therefore \text{최솟값 } M &= -(m+1)^2 + 4m \\ &= -m^2 + 2m - 1 \\ &= -(m^2 - 2m + 1) \\ &= -(m-1)^2 \\ \text{따라서 } a \text{ 의 최댓값은 } 0 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

26. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



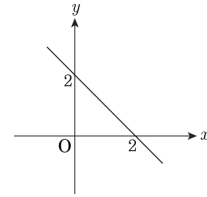
[배점 5, 중상]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4 \\ C &(-1, -4) \\ y = 0 \text{ 일 때 } x^2 + 2x - 3 &= (x+3)(x-1) = 0 \\ \text{이므로} \\ A &(-3, 0), B(1, 0) \\ \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \end{aligned}$$

27. 다음 그림은 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이 차함수 $y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3$ 의 그래프의 최댓값을 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 5

해설

$$\begin{aligned} \text{기울기 } a &= -1, y \text{ 절편 } b = 2 \\ y &= \frac{1}{2}ax^2 + bx + 3 \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5 \\ x = 2 \text{ 일 때, 최댓값은 } 5 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

28. $y = x^2 + 2ax + a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{1}{4}$

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + a = (x+a)^2 - a^2 + a \\ \text{최솟값은 } -a^2 + a \text{ 이다.} \\ \text{즉, } m &= -a^2 + a = -(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \text{ 이다.} \\ \therefore a = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } m \text{ 은 최댓값 } \frac{1}{4} \text{ 을 갖는다.} \end{aligned}$$

29. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?
[배점 5, 중상]

- ① 5 초 후 ② 7 초 후
③ 8 초 후 ④ 10 초 후
⑤ 알 수 없다

해설

$$\begin{aligned} y &= 50t - 5t^2 \\ y &= -5(t^2 - 10t + 25 - 25) \\ &= -5(t - 5)^2 + 125 \end{aligned}$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

30. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 정답 : 12 cm

▶ 정답 : 12 cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24 - x)$ cm 라 하면

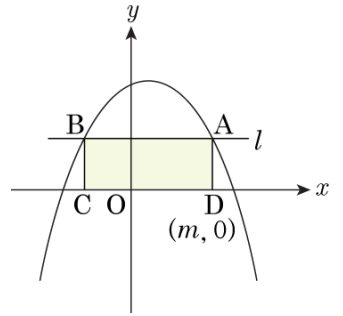
$$\begin{aligned} y &= x(24 - x) \\ &= -x^2 + 24x \\ &= -(x - 12)^2 + 144 \end{aligned}$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144 를 갖는다.

$\therefore x = 12, 24 - x = 12$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

31. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, $\square ABCD$ 의 둘레의 길이의 최댓값은?
 $(\frac{1}{2} < m < 3)$
[배점 5, 중상]



- ① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + x + 6 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4} \text{ 의 점 A 의 } \\ &\text{좌표는 } (m, -m^2 + m + 6) \text{ 이다.} \\ &\text{직사각형의 가로의 길이는 } 2(m - \frac{1}{2}) \text{ 이고,} \\ &\text{직사각형의 세로의 길이는 } -m^2 + m + 6 \\ (\square ABCD \text{ 둘레의 길이}) &= 2\{2(m - \frac{1}{2}) - m^2 + m + 6\} \\ &= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6) \\ &= 2(-m^2 + 3m + 5) \\ &= -2(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{29}{2} \\ m = \frac{3}{2} \text{ 일 때, 최댓값은 } \frac{29}{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

32. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?
[배점 5, 중상]

- ① 5 초 후 ② 7 초 후
③ 8 초 후 ④ 10 초 후
⑤ 알 수 없다.

해설

$$y = 50t - 5t^2$$

$$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t - 5)^2 + 125$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.

33. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?
[배점 5, 중상]

- ① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ 3 ⑤ 6

해설

$$y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$$

$$= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4$$

$$= 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$$

$y = 2(x - 2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a + 5)$ 를 지나므로

$$8a + 5 = 2(2a - 2)^2 - 12 + 3a$$

$$8a^2 - 21a - 9 = 0, (8a + 3)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{8} \text{ 또는 } 3$$

그런데 최솟값 $-12 + 3a > -5$ 이므로

i) $a = -\frac{3}{8}$ 대입 : $-12 + 3 \times (-\frac{3}{8}) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$

ii) $a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$

따라서 $a = 3$ 이다.

34. $2x + y = a + 2$, $x + 2y = 8(a + 2)$ 를 만족하는 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

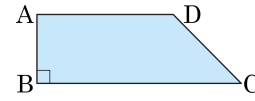
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}
 2x + y &= a + 2 \cdots \textcircled{1} \\
 x + 2y &= 8(a + 2) \cdots \textcircled{2} \\
 2 \times \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 을 하면} \\
 3x &= -6a - 12, \quad x = -2a - 4 \\
 x = -2a - 4 \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면} \\
 y &= 5a + 10 \\
 x^2 + y^2 &= (-2a - 4)^2 + (5a + 10)^2 \\
 &= 4a^2 + 16a + 16 + 25a^2 + 100a + 100 \\
 &= 29a^2 + 116a + 116 \\
 &= 29(a + 2)^2 \\
 \therefore \text{ 최솟값 } 0
 \end{aligned}$$

35. 다음 그림의 사다리꼴 ABCD 에서 $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\overline{AB} + \overline{BC} = 18$ 일 때, 이 사다리꼴의 최대 넓이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

꼭짓점 D 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 변 AB 의 길이를 x 라 하면 $\triangle DHC$ 는 이등변삼각형이고 변 BC 의 길이는 $18 - x$ 이다.

$$\overline{AB} = \overline{DH} = \overline{HC} = x$$

$$\overline{AD} = 18 - x - x = 18 - 2x$$

사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \{ (18 - 2x) + (18 - x) \} \times x$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 18x$$

$$= -\frac{3}{2}(x - 6)^2 + 54$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 사다리꼴 넓이의 최댓값은 54 이다.