실력 확인 문제

1. 다음 중 200 의 약수가 아닌 것은? [배점 3, 하상]

① 2×5 ② $2^2 \times 5^2$ ③ 2×5^3

④ $2^3 \times 5$ ⑤ 5^2

해설

$200 = 2^3 \times 5^2$

200 의 약수

	1	5	5^2
1	1	5	5^2
2	2	2×5	2×5^2
2^2	2^2	$2^2 \times 5$	$2^2 \times 5^2$
2^3	2^3	$2^3 \times 5$	$2^3 \times 5^2$

이므로 아닌 것은 ③

2. 서로 맞물려 도는 두 톱니바퀴 A, B 가 있다. A 의 톱니바퀴의 수는 36 개, B 의 톱니의 수는 48 개일 때, 두 톱니바퀴가 같은 톱니에서 처음으로 다시 맞물리는 것은 A 가 몇 바퀴 돈 후인가? [배점 3, 하상]

① 4 바퀴 ② 5 바퀴 ③ 6 바퀴

④ 7 바퀴 ⑤ 8 바퀴

해설

$36 = 2^2 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$ 의

최소공배수는 $2^4 \times 3^2 = 144$ 이다.

$\therefore$ A 가 돈 회수는 $\dfrac{144}{36} = 4$(바퀴) 이다.

3. 불이 켜진 전구는 1, 불이 꺼진 전구는 0 으로 생각하면 3개의 전구를 사용하여 $0, 1, 2, \cdots, 7$ 까지의 수를 이진법으로 나타낼 수 있다. 이와 같은 방법으로 30 을 이진법으로 나타내려면 적어도 몇 개의 전구가 필요한가? [배점 3, 하상]

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개

④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$30 = 11110_{(2)}$

이진법으로 다섯 자리 수이므로 5 개이다.

4. 가로의 길이가 5 cm, 세로의 길이가 8 cm, 높이가 12 cm 인 직육면체 모양의 벽돌을 빈틈없이 쌓아서 가장 작은 정육면체 모양을 만들려고 한다. 이때, 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 120 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이는 5, 8, 12 의 공배수이어야 하고, 가장 작은 정육면체를 만들려면 한 변의 길이는 5, 8, 12 의 최소공배수이어야 한다. 따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 120 cm 이다.

$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 5 & 8 & 12 \\ \hline & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

5. 다음 네모 칸에 쓰여진 수 중에서 $2^4 \times 3^3 \times 11$ 의 약수를 모두 찾아 색칠하면 한글 자음 중 하나가 나타난다. 그 한글 자음은 무엇인지 찾아라.

$2^3 \times 3^2 \times 11$	99	$2^3 \times 3^3 \times 11$
$3^5 \times 11$	32	$2^4 \times 3^3$
100	$2 \times 3^2 \times 11^2$	$2^3 \times 11$
3×7	121	$3^2 \times 11$

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : ㄱ

해설

2^4 의 약수는 1 , 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 3^3 의 약수는 1 , 3 , 3^2 , 3^3 , 11의 약수는 1 , 11 이다.
또 $32 = 2^5$, $100 = 2^2 \times 5^2$, $121 = 11^2$, $99 = 3^2 \times 11$ 이다.
$2^4 \times 3^3 \times 11$ 의 약수를 찾아 색칠하면 다음과 같다.

$2^3 \times 3^2 \times 11$	99	$2^3 \times 3^3 \times 11$
$3^5 \times 11$	32	$2^4 \times 3^3$
100	$2 \times 3^2 \times 11^2$	$2^3 \times 11$
3×7	121	$3^2 \times 11$

6. 10 보다 크고 20 보다 작은 자연수 중에서 6 과 서로소인 것은 모두 몇 개인지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 개

해설

10 보다 크고 20 보다 작은 자연수 중에서 6 과 최대공약수가 1 인 수들을 모두 구하면
$11, 13, 17, 19$ 의 4 개이다.
따라서 10 보다 크고 20 보다 작은 자연수 중에서 6 과 서로소인 자연수는 모두 4 개이다.

7. 다음 중 가장 작은 수를 고르면? [배점 4, 중중]

① $10111_{(2)}$ ② 5^2 ③ $11000_{(2)}$
④ 3^3 ⑤ $10101_{(2)}$

해설

① $10111_{(2)} = 23$
② $5^2 = 25$
③ $11000_{(2)} = 24$
④ $3^3 = 27$
⑤ $10101_{(2)} = 21$

8. 30 을 이진법으로 나타내었을 때, 각 자리의 숫자의 합을 십진법으로 나타내면? [배점 4, 중중]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$30 = 11110_{(2)}$
$\therefore\ 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

9. 다음<보기> 중 소인수분해를 올바르게 한 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $45 = 3^2 \times 5$

㉡ $28 = 2^2 \times 7$

㉢ $150 = 2 \times 3^2 \times 7$

㉣ $512 = 2^9$

㉤ $72 = 2^2 \times 3^3$

㉥ $96 = 2^5 \times 3$

[배점 4, 중중]

① ㉠,㉡,㉢,㉣ ② ㉡,㉢,㉤,㉥

③ ㉠,㉡,㉣,㉥ ④ ㉡,㉣,㉤,㉥

⑤ ㉠,㉢,㉣,㉥

해설

㉢ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$
㉤ $72 = 2^3 \times 3^2$

10. $2^3 \times 7^2 \times a^2 \times b$ 의 약수의 개수는 모두 몇 개인지 구하여라.
(단, a, b 는 2 ,7을 제외한 소수이다.)

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 72 개

해설

$(3+1) \times (2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 72$(개)

11. 집합 $A = \{x|x$는 30 이하의 소수$\}$ 에서 A 의 원소가 아닌 것은?

[배점 4, 중상]

① 11 ② 17 ③ 23 ④ 27 ⑤ 29

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ 이므로 A 의 원소가 아닌 것은 27 이다.

12. 가로의 길이가 54cm, 세로의 길이가 $2 \times 3^2 \times 6$cm, 높이가 90cm 인 직육면체를 가능한 한 가장 큰 정육면체로 가득 채우려고 한다. 이때, 사용되는 정육면체의 한 모서리의 길이를 a cm, 정육면체의 개수를 b개라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

만들어진 정육면체의 한 모서리의 길이는
54, $2 \times 3^2 \times 6$, 90 의 최대공약수이므로
$54 = 2 \times 3^3$
$2 \times 3^2 \times 6 = 2^2 \times 3^3$
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
최대공약수는 $2 \times 3^2 = 18$
$\therefore\ a = 18$
정육면체의 개수는
$(54 \div 18) \times (108 \div 18) \times (90 \div 18) = 3 \times 6 \times 5 = 90$ (개)
$\therefore\ b = 90$
$\therefore\ \frac{b}{a} = \frac{90}{18} = 5$

13. 두 자리의 자연수 A, B 에 대해서 $A = 5 \times a$, $B = 5 \times b$ 일 때, A, B 의 최대공약수는 $101_{(2)}$ 이고, 최소공배수는 $5 \times 11100_{(2)}$ 이다. $A > B$ 일 때, $a - b$ 의 값을 이진법으로 나타낸 것은? [배점 5, 중상]

① $1_{(2)}$ ② $10_{(2)}$ ③ $11_{(2)}$

④ $100_{(2)}$ ⑤ $101_{(2)}$

해설

$101_{(2)} = 4 + 1 = 5$
$A = 5 \times a$, $B = 5 \times b$ 에서 최대공약수가 5 이므로 a, b 는 서로소이다.
따라서 A, B 의 최소공배수는
$5 \times a \times b = 5 \times 11100_{(2)} = 5 \times 28$
a, b 가 서로소이므로 $(2,\ 14)$, $(14,\ 2)$ 는 될 수 없다.
따라서 $(a,\ b) = (4,\ 7)$ 또는 $(7,\ 4)$ 이고 $A > B$ 이라 했으므로 $a = 7$, $b = 4$ 이다.
$a - b = 3 = 11_{(2)}$ 이다.

14. 귤 48개와 참외 24개, 키위 36개를 가능한 한 많은 학생들에게 똑같이 나누어주려고 한다. 한 학생이 받는 귤, 참외, 키위의 개수를 각각 a, b, c 라 할 때 $a + b - c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48, 24, 36 의 최대공약수는 12 이므로 각각 받을 수 있는 과일의 수는
$a = 48 \div 12 = 4$, $b = 24 \div 12 = 2$, $c = 36 \div 12 = 3$
$\therefore a + b - c = 4 + 2 - 3 = 3$

15. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [배점 5, 중상]

① 가장 작은 소수는 2 이다.

② 100 과 243 는 서로소이다.

③ 두 자연수가 서로소이면 두 자연수는 소수이다.

④ 두 자연수가 서로소가 아니면 두 자연수는 소수가 아니다.

⑤ 10 보다 작은 자연수 중에서 소수는 4 개이다.

해설

③ 반례 : 3 과 4 는 서로소이지만 4 는 소수가 아니다.

16. $15g$ 짜리 추가 땅에 떨어지면서 네 조각이 났다. 이 네 조각으로 양팔저울의 양쪽 접시를 모두 이용하여 $1g$ 에서 $15g$ 까지 $1g$ 씩 빠짐없이 무게를 잴 수 있다고 한다. 이 때, 이 네 조각의 무게는 각각 얼마인가?

[배점 5, 중상]

▶ 답:
▶ 답:
▶ 답:
▶ 답:
▷ 정답: 1 g
▷ 정답: 2 g
▷ 정답: 4 g
▷ 정답: 8 g

해설

2 진법에서 1 과 0 으로 모든 수를 표현할 수 있다. 추가 있다와 없다를 이용하여 $15g$ 을 모두 표현할 수 있기 때문에 네 조각의 무게는 이진법의 자릿값을 생각할 수 있다.
이진법의 자릿값은 $1, 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, \cdots$ 이고, $1+2+4+8 = 15$ 이므로 조각난 네 조각의 무게는 각각 $1g, 2g, 4g, 8g$ 이다.

17. 가로의 길이가 15, 세로의 길이가 21, 높이가 6 인 상자를 $x$cm 인 정육면체로 채우려고 한다. 이 때, 가장 큰 정육면체로 상자를 채우려면 몇 개의 정육면체가 필요한가?

[배점 5, 상하]

① 40 개 ② 50 개 ③ 60 개
④ 70 개 ⑤ 80 개

해설

15, 21, 6 의 최대공약수를 구하면 3 이다.
따라서 필요한 벽돌의 개수는
$(15 \div 3) \times (21 \div 3) \times (6 \div 3) = 70$(개) 이다.

18. 두 자리의 칠진수 $ab_{(7)}$ 를 사진법으로 바꾸었더니 $ba_{(4)}$ 가 되었다. $ab_{(7)} + ba_{(4)}$ 를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:
▷ 정답: 18

해설

두 자리 구진수를 $ab_{(7)}$ 라고 두면, $ab_{(7)} = ba_{(4)}$
$\rightarrow 7a + b = 4b + a$
$\rightarrow 2a = b$
a, b 는 항상 1 보다 크고 4 보다 작으므로 위 조건을 만족하는 값은 $12_{(7)}$ 이다.
$\therefore 12_{(7)} + 21_{(4)} = 9 + 9 = 18$

19. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합
$A = \{x|x$는 삼진법으로 나타냈을 때 세 자리 수가 되는 십진수$\}$,
$B = \{x|x$는 3으로 나누었을 때 나머지가 1$\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:
▷ 정답: 6

해설

삼진법의 세 자리 수는 $100_{(3)}$ 부터 $222_{(3)}$ 까지이고, 십진수로는 9 부터 26 까지이다.
$\rightarrow A = \{9, 10, 11, \cdots, 26\}$
$\rightarrow B = \{1, 4, 7, 10, \cdots\}$
$A \cap B = \{10, 13, 16, 19, 22, 25\}$
$\therefore n(A \cap B) = 6$

20. 집합 $A_k = \{x|x\text{는 } k\text{의 약수, } k\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 $A_4 \subset (A_{28} \cap A_k)$ 를 만족할 때, $n(A_k)$ 가 홀수인 두 자리 자연수 k 를 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

▷ 정답 : 36

▷ 정답 : 64

해설

$A_4 = \{1, 2, 4\}$, $A_{28} = \{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28\}$ 이므로,

$A_4 \subset (A_{28} \cap A_k)$ 를 만족하려면 1, 2, $4 \in A_k$

$\rightarrow k = 2^2 \times a$

또 $n(A_k)$ 가 홀수이려면 k 는 반드시 어떤 수의 제곱이어야 한다.

$\therefore k = 16, 36, 64$