여러가지 경우의 수

1. 8명의 친구가 서로 2명씩 짝을 지어 게임을 한다면 방법은 모두 몇 가지가 있는지 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▷ 정답: 105가지

해설

$\frac{8\times7}{2\times1}\times\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{2\times1}{2\times1}\times\frac{1}{4\times3\times2\times1}=$ 105 (가지)

2. 서로 다른 색깔의 6 자루의 색연필 중에서 두 자루를 선택하는 경우의 수를 구하여라. [배점 2, 하중]

▶ 답:

▷ 정답: 15가지

해설

$\frac{6\times5}{2}=15$ (가지)

3. A, B, C, D, E, F 여섯 명이 한 줄로 늘어설 때, F가 맨 앞에 서는 경우의 수는? [배점 3, 하상]

① 60 ② 80 ③ 100
④ 120 ⑤ 720

해설

F를 앞에 세워 놓고, A, B, C, D, E를 한 줄로 세우는 경우의 수는

$5\times4\times3\times2\times1=120$ (가지)

4. A, B, C, D, E 다섯 팀이 다른 팀과 한 번씩 농구 경기를 할 때, 모두 몇 번의 경기를 하여야 하는가? [배점 3, 하상]

① 5번 ② 10번 ③ 12번
④ 16번 ⑤ 20번

해설

5팀 중 2팀을 뽑는 경우이므로 시합은 $\frac{5\times4}{2}=10$ (번) 이루어진다.

5. 1에서 5까지의 숫자가 각각 적힌 5장의 카드에서 두 장을 뽑아 만들 수 있는 두 자리의 정수 중에서 30 이상이 되는 경우의 수를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답:

▷ 정답: 12가지

해설

30 이상이려면 십의 자리의 숫자는 3, 4, 5 중 하나이므로 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 3가지, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 십의 자리의 숫자를 제외한 4가지이다.

$\therefore\ 3\times4=12$ (가지)

6. 2에서 9까지의 숫자가 각각 적힌 8장의 카드에서 두 장을 뽑아 두 자리 수를 만드는 경우의 수는?

[배점 3, 하상]

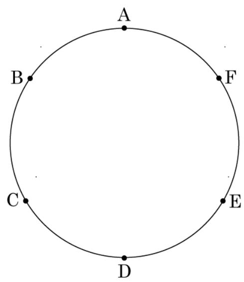
① 18가지 ② 24가지 ③ 36가지

④ 56가지 ⑤ 64가지

해설

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 8가지이고, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 십의 자리의 숫자를 제외한 7가지이다.
따라서 $8 \times 7 = 56$ (가지)

7. 아래 그림과 같이 원 위에 서로 다른 6개의 점이 있다. 이 중에서 3개의 점을 이어 삼각형을 만들 때, 만들 수 있는 삼각형의 개수는?



[배점 3, 하상]

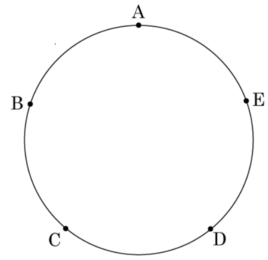
① 10개 ② 15개 ③ 18개

④ 20개 ⑤ 30개

해설

6개의 점 중에서 3개의 점을 차례로 뽑는 경우의 수는 $6 \times 5 \times 4$(가지)이다. 삼각형의 세 점의 순서가 바뀌어도 같은 삼각형이므로 구하는 삼각형의 개수는 $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$(개)이다.

8. 다음 그림과 같이 원 위에 5개의 점이 있다. 이 중에서 세 점을 이어 생기는 삼각형의 개수를 구하여라.



[배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10 개

해설

5개의 점 중에서 3개의 점을 차례로 뽑는 경우의 수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$(가지)이다. 그런데 세 점 A, B, C를 이어 생기는 $\triangle ABC$, $\triangle ACB$, $\triangle BAC$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle CBA$는 모두 같은 삼각형이다. 삼각형의 세 점의 순서가 바뀌어도 같은 도형으로 간주하여 구하는 삼각형의 개수는 $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$(개)이다.

9. 0, 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 적힌 5장의 카드에서 2장을 뽑아 만들 수 있는 두 자리의 정수의 개수는?

[배점 3, 하상]

① 12개 ② 16개 ③ 18개

④ 20개 ⑤ 25개

해설

십의 자리에는 1 ~ 4 중 어느 것을 놓아도 되므로 4가지가 있고, 일의 자리에는 십의 자리에서 사용한 하나를 제외한 4가지가 있으므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$ (개)이다.

10. 주사위 한 개를 연속으로 두 번 던질 때, 처음 나온 수를 x , 두 번째 던져서 나온 눈의 수를 y 이라고 할 때, $2x+4y=12$ 가 되는 경우의 수를 구하면?

[배점 3, 중하]

① 2가지 ② 3가지 ③ 4가지

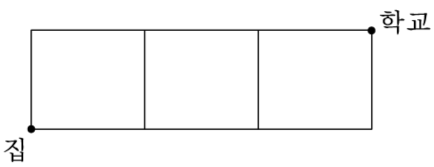
④ 5가지 ⑤ 6가지

해설

$x=6-2y$ 이므로 x,y 의 순서쌍은 $(4,1),(2,2)$

$\therefore$ 2 가지

11. 집에서 학교까지 가는 최단경로의 가짓수를 구하여라.

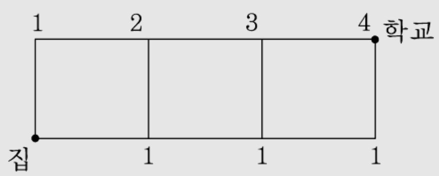


[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 4가지

해설



12. 민수는 윗옷 3벌, 치마 1벌, 바지가 2벌 있습니다. 이 옷을 옷걸이에 정리해서 걸려고 할 때, 바지가 이웃하도록 거는 경우의 수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

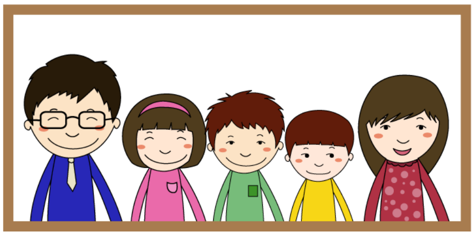
▶ 답:

▷ 정답: 240가지

해설

바지가 이웃하도록 거는 경우의 수는 $(5\times4\times3\times2\times1)\times2=240$(가지)이다.

13. 부모님, 누나, 형, 철수 5명의 가족이 나란히 앉아서 가족사진을 찍으려고 한다. 누나, 형, 철수가 이웃하여 가족사진을 찍게 되는 경우의 수를 구하여라.



[배점 3, 중하]

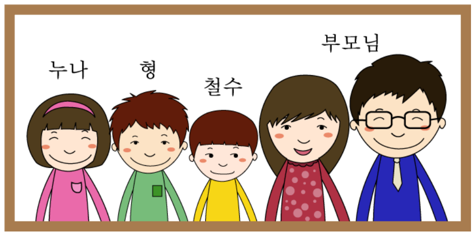
▶ 답 :

▷ 정답 : 36 가지

해설

누나, 형, 철수를 하나로 묶어 한 줄로 세우는 경우의 수와 같으므로 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) 이고, 누나, 형, 철수가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $(3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 36$(가지)

14. 부모님을 포함하여 5 명의 가족이 나란히 앉아서 가족사진을 찍으려고 한다. 부모님이 이웃하여 앉아 사진을 찍게 되는 경우의 수를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 48 가지

해설

부모님을 하나로 묶어 한 줄로 세운 다음, 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수를 곱한다.

$\therefore\ (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 48$(가지)

15. A, B, C, D, E 5 명을 한 줄로 세울 때, A, C, E 가 이웃하는 경우의 수는? [배점 3, 중하]

① 12 가지 ② 24 가지 ③ 36 가지
④ 48 가지 ⑤ 60 가지

해설

A, C, E 를 하나로 묶어 한 줄로 세우는 경우의 수와 같으므로 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) 이고, A, C, E 가 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $(3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 36$ (가지) 이다.

16. 1 에서 8 까지 적힌 자물쇠가 있다. 4 자리의 비밀번호를 만들 때, 만들 수 있는 비밀번호의 경우의 수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1680 가지

해설

1 에서 8 까지의 숫자 8 개 중 4 개를 뽑아 네 자리 정수를 만드는 것과 같다.

$8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ (가지)

17. 다음 숫자 카드 5 장을 사용하여 251 보다 작은 3 자리 수를 만들려고 할 때의 경우의 수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 18 가지

해설

i) 백의 자리 수가 2 인 경우, 251 보다 작은 수는

237, 235, 231, 213, 215, 217 $\Rightarrow$ 6 가지

ii) 백의 자리 수가 1 인 경우,

1 $\boxed{}\boxed{}$ 의 경우 $\rightarrow 4 \times 3 \Rightarrow 12$ 가지

총 $6 + 12 = 18$ (가지)

18. A, B, C, D 4 명을 모아 놓고 농구를 하였다. 운동이 끝난 후 무심코 가방을 들었을 때, 자기 가방을 든 학생이 한 명도 없을 경우의 수는? [배점 4, 중중]

① 5 가지 ② 8 가지 ③ 9 가지

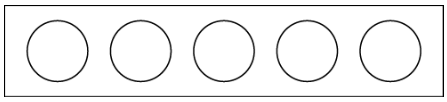
④ 12 가지 ⑤ 15 가지

해설

4 명의 학생을 A, B, C, D 라 하고 그들의 가방을 각각, a, b, c, d 라 할 때, 학생들이 가져간 가방을 (A, B, C, D) 꼴로 나타내 보면 (b, a, d, c) , (b, c, d, a) , (b, d, a, c) , (c, a, d, b) , (c, d, a, b) , (c, d, b, a) , (d, a, b, c) , (d, c, a, b) , (d, c, b, a)

$\therefore$ 9 가지

19. 5 개의 자음 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ을 다음 그림의 원 안에 각각 배열할 때, ㄱ, ㅁ이 양 끝에 위치하고 나머지 ㄴ, ㄷ, ㄹ을 나머지 원에 배열하는 방법의 수를 구하여라.



[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 가지

해설

ㄱ, ㅁ을 제외한 ㄴ, ㄷ, ㄹ을 일렬로 배열하는 경우이므로 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지)

이때, ㄱ, ㅁ은 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$ (가지)

20. 할머니와 어머니, 아버지 그리고 3 명 의 자녀 모두 6 명 이 일렬로 설 때, 어머니가 맨 앞에, 아버지가 맨 뒤에 서는 경우의 수는? [배점 4, 중중]

① 6 가지　② 12 가지　③ 18 가지　④ 20 가지　⑤ 24 가지

해설

아버지와 어머니는 자리가 고정되어 있으므로 남은 4 명 을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (가지)

21. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 숫자들 중에서 3 개를 뽑아 세 자리 정수를 만들 때, 아래의 설명 중 '나' 에 해당하는 숫자는 몇인지 말하여라.

· 나는 가운데 숫자가 5 인 세 자리 정수 입니다. · 나는 21 번째로 큰 수입니다. · 나는 홀수입니다.

[배점 4, 중중]

▶ 답：

▷ 정답： 453

해설

백의 자리가 5 인 수를 세어보면 5□□ $\rightarrow 5\times4 = 20$ 이므로
21 번째로 큰 수는 453 이다.
453 은 가운데 숫자가 5 인 세 자리 정수이고, 홀수이다.

22. 국어, 영어, 수학, 사회, 과학, 일본어 참고서가 각각 1 권씩 있다. 이 중에서 3 권을 뽑아 책꽂이에 꽂을 때, 일본어 참고서를 제외하는 경우의 수는? [배점 4, 중중]

① 12 가지　② 24 가지　③ 60 가지　④ 120 가지　⑤ 360 가지

해설

일본어 참고서를 제외한 나머지 5 권 중에서 3 권을 뽑아 책꽂이에 꽂는 경우의 수이므로 $5\times4\times3 = 60$ (가지) 이다.

23. A, B 중에서 회장을 뽑고, C, D, E, F 중에서 부회장, 총무를 뽑는 경우의 수는? [배점 4, 중중]

① 12가지　② 24가지　③ 36가지　④ 48가지　⑤ 60가지

해설

2 명 중에서 회장을 뽑는 방법은 2가지이다. 4 명 중에서 부회장을 뽑는 방법은 4가지이고, 4 명 중 부회장을 제외한 3 명 중에서 총무를 뽑아야 한다. 그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times4\times3 = 24$(가지) 이다.

24. 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$에서 원소의 개수가 3개인 부분집합의 개수는? [배점 4, 중중]

① 3개 ② 5개 ③ 9개

④ 10개 ⑤ 15개

해설

집합 $\{a,\ b,\ c\} = \{a,\ c,\ b\} = \{b,\ a,\ c\} = \{b,\ c,\ a\} = \{c,\ a,\ b\} = \{c,\ b,\ a\}$이므로 5개의 원소 중 순서에 관계없이 3개를 택하는 방법은 $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$(개)이다.

25. 0, 1, 2, 3 의 4 개의 수를 사용하여 세 자리 수를 만들려고 한다. 같은 수를 반복해서 사용하지 않고 만들 수 있는 경우의 수를 m 이라고 하고, 같은 수를 여러 번 사용해도 되는 경우 나올 수 있는 경우의 수를 n 이라고 할 때, $n \div m$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 30 ② 24 ③ 18 ④ 12 ⑤ 9

해설

같은 수를 반복해서 사용하지 않고 만들 수 있는 경우, 백의 자리에 올 수 있는 경우의 수는 0 을 제외한 3 가지, 십의 자리에는 0 을 포함하고 백의 자리에서 사용했던 수는 제외하여 올 수 있는 경우의 수는 3 가지, 일의 자리는 2 가지이다. 따라서 $3 \times 3 \times 2 = 18$ (가지)이다. 따라서 $m = 18$ 이다. 같은 수를 여러 번 사용해도 되는 경우 나올 수 있는 경우, 백의 자리에 올 수 있는 경우의 수는 0 을 제외한 3 가지, 한번 사용했던 숫자를 여러 번 사용할 수 있으므로 십의 자리와 일의 자리는 0 을 포함한 경우의 수는 각각 4 가지이다. 따라서 $3 \times 4 \times 4 = 48$(가지)이다. 따라서 $n = 48$ 이다. 그러므로 $n - m = 30$이다.

26. 10 은 $1+1+8$ 로 나타낼 수 있다. 이와 같이 10 을 3 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, $1+1+8$ 은 $1+8+1$, $8+1+1$ 과 같은 것으로 한다.) [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8가지

해설

합이 10이 되는 자연수 $(x,\ y,\ z)$ 는
$(1,\ 1,\ 8)$, $(1,\ 2,\ 7)$, $(2,\ 2,\ 6)$, $(1,\ 3,\ 6)$, $(2,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 5)$, $(2,\ 4,\ 4)$
$\therefore$ 8가지

27. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 세 개인 것들을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n$ 이라 하고, 집합 A_k 의 원소의 총합을 a_k 라고 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1980

해설

원소가 3 개인 부분집합의 총 개수는
$\dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ (가지)
원소의 총 개수는 $3 \times 120 = 360$ (가지)
$1, 2, 3, \cdots, 10$ 이 나오는 확률은 같으므로 36 번씩 나온다.

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
$= (1+2+3+\cdots+10) \times 36$
$= 1980$

28. a, b, c, d 의 문자를 사전식으로 배열할 때, $cadb$ 는 몇 번째인가? [배점 5, 중상]

① 14 번째 ② 15 번째 ③ 16 번째

④ 17 번째 ⑤ 18 번째

해설

a 또는 b 가 맨 앞에 오면 어떤 다른 문자가 와도 $cadb$ 보다 사전식 배열은 앞선다.

$a\times\times\times$ 인 경우는 $3\times2\times1=6$ (가지), $b\times\times\times$ 인 경우는 $3\times2\times1=6$ (가지)

또한, c 가 앞에 오는 경우는 사전식으로 배열하면 $cabd$, $cadb$, $\cdots$

따라서 $cadb$ 는 사전식으로 배열할 때, $6+6+2=14$ (번째) 에 온다.

29. 5 개의 문자 a , b , c , d , e 를 사용하여 만들어지는 120 개의 문자를 사전식으로 $abcde$ 에서 $edcba$ 까지 나열하였다. 이 때, $bdcea$ 는 몇 번째에 있는지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 40 번째

해설

$a\times\times\times\times$: $4\times3\times2\times1=24$

$ba\times\times\times$, $bc\times\times\times$: $2\times3\times2\times1=12$

$bda\times\times$: 2

다음에 오는 문자는 $bdcae$, $bdcea$ 이므로 40 번째가 된다.

30. 1, 2, 3, 4 의 숫자가 각각 적힌 네 장의 카드가 들어있는 주머니에서 3 장의 카드를 뽑아 세 자리 정수를 만들 때, 작은 것부터 크기순으로 17 번째 나오는 수는? [배점 5, 중상]

① 321 ② 324 ③ 341

④ 342 ⑤ 412

해설

1□□ 인 경우는 $3\times2=6$ (가지),

2□□ 인 경우는 $3\times2=6$ (가지),

3□□ 인 경우는 $3\times2=6$ (가지) 이므로 작은 것부터 크기순으로 17 번째 오는 세 자리 정수는 3 으로 시작하는 세 자리 정수 가운데 끝에서 두 번째인 341 이다.

31. A, B, C 중학교에서 4 명씩 선발하여 달리기 시합을 한다. 각 학교별로 시합을 하여 2 명씩 다시 선발한다고 할 때, 최종 시합에 나가게 되는 학생들이 뽑는 경우의 수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 216 가지

해설

각 학교별로 2 명씩 선발하는 경우의 수는 $\dfrac{4\times3}{2\times1}$ 이고, 세 학교가 동시에 2 명을 선발하므로 총 경우의 수는 $\left(\dfrac{4\times3}{2}\right)^3=216$(가지) 이다.

32. 관광객 5명이 호텔에서 A, B, C의 세 방으로 나뉘어서 묵게 되었다. 이 때, A 방은 4명, B 방은 3명, C 방은 3명이 정원이고, 빈 방을 만들지 않기로 한다. B 방에 3명이 묵을 때, 나머지 5명이 묵게 되는 방법의 가지의 수를 구하면? [배점 5, 중상]

① 6가지 ② 12가지 ③ 18가지

④ 20가지 ⑤ 25가지

해설

(B 방에 들어갈 세 명을 뽑는 경우의 수)× (2명을 A, C에 묵게 하는 경우의 수)이므로 $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times 2\times1=20$(가지)이다.

33. 남학생 3 명, 여학생 3 명을 일렬로 세울 때, 어느 남학생끼리도 이웃하지 않고, 어느 여학생끼리도 서로 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수는? [배점 5, 중상]

① 12 가지 ② 24 가지 ③ 48 가지

④ 60 가지 ⑤ 72 가지

해설

남학생끼리 이웃하지 않고, 여학생끼리도 서로 이웃하지 않도록 세우는 경우는 남학생과 여학생을 번갈아 가며 세우는 것이다. (남, 여, 남, 여, 남, 여), (여, 남, 여, 남, 여, 남)의 두 경우에서 각각 남학생과 여학생을 세우는 방법의 수는 $3\times2\times1=6$ (가지)이다. 따라서 (남, 여, 남, 여, 남, 여)로 세우는 경우는 $6\times6=36$ (가지)이고 (여, 남, 여, 남, 여, 남)의 경우도 36 가지이므로 구하는 경우의 수는 72 가지이다.

34. 1 부터 12 까지의 숫자가 적힌 공 12 개가 주머니 속에 들어있다. 이 중 4 개를 골라내었을 때, 공에 적힌 4 개의 수 중 가장 큰 수가 두 자리 수이고, 가장 작은 수는 소수인 경우의 수를 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 190 가지

해설

한꺼번에 4 개의 공을 모두 꺼내므로 순서는 생각하지 않고 (가장 작은 수 ○○ 가장 큰 수)를 살펴보면

(1) (2 ○ ○10) 인 경우, 나머지 두 수는 3 에서 9 까지이므로 $\frac{7\times6}{2}=21$ (가지)

(2) (2 ○ ○11) 인 경우, 나머지 두 수는 3 에서 10 까지이므로 $\frac{8\times7}{2}=28$ (가지)

(3) (2 ○ ○12) 인 경우, 나머지 두 수는 3 에서 11 까지이므로 $\frac{9\times8}{2}=36$ (가지)

(4) (3 ○ ○10) 인 경우, 나머지 두 수는 4 에서 9 까지이므로 $\frac{6\times5}{2}=15$ (가지)

(5) (3 ○ ○11) 인 경우, 나머지 두 수는 4 에서 10 까지이므로 $\frac{7\times6}{2}=21$ (가지)

(6) (3 ○ ○12) 인 경우, 나머지 두 수는 4 에서 11 까지이므로 $\frac{8\times7}{2}=28$ (가지)

(7) (5 ○ ○10) 인 경우, 나머지 두 수는 6 에서 9 까지이므로 $\frac{4\times3}{2}=6$ (가지)

(8) (5 ○ ○11) 인 경우, 나머지 두 수는 6 에서 10 까지이므로 $\frac{5\times4}{2}=10$ (가지)

(9) (5 ○ ○12) 인 경우, 나머지 두 수는 6 에서 11 까지이므로 $\frac{6\times5}{2}=15$ (가지)

(10) (7 ○ ○10) 인 경우, 나머지 두 수는 8, 9 이므로 1 (가지)

(11) (7 ○ ○11) 인 경우, 나머지 두 수는 8 에서 10 까지이므로 $\frac{3\times2}{2}=3$ (가지)

(12) (7 ○ ○12) 인 경우, 나머지 두 수는 8 에서 11 까지이므로 $\frac{4\times3}{2}=6$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $21+28+36+15+21+28+6+10+15+1+3+6=190$ (가지)이다.

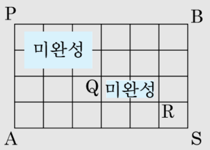
35. 다음 그림과 같이 만들어진 도로망 중 일부가 아직 미완성이다. A 지점에서 B 지점까지 갈 수 있는 최단 경로의 가짓수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 126 가지

해설



$A \to P \to B$: 1 가지

$A \to Q \to B : \dfrac{5!}{3!2!} \times \dfrac{5!}{3!2!} = 100$(가지)

$A \to R \to B : \dfrac{6!}{1!5!} \times \dfrac{4!}{1!3!} = 24$(가지)

$A \to S \to B$: 1 가지

따라서 구하는 경우의 수는 $1 + 100 + 24 + 1 =$ 126(가지) 이다.