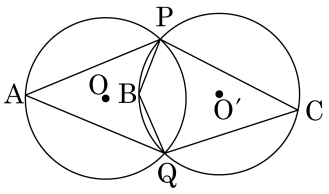
단원테스트 1차

1. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 두 원 O, O′가 두 점 P, Q 에서 만날 때, $\angle PAQ : \angle PBQ = 1 : 3$ 이다. $\angle PAQ$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 45°

해설

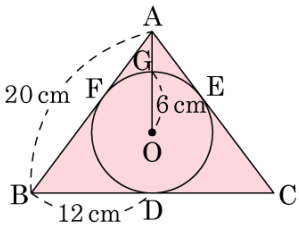
$\angle PAQ = \angle PCQ$ 이고

$\angle PBQ + \angle PCQ = 180°$ 이므로

$\angle PBQ + \angle PAQ = 180°$

$\therefore \angle PAQ = 180 \times \frac{1}{4} = 45°$

2. 다음 그림에서 원 O 는 반지름의 길이가 6cm 인 △ABC 의 내접원이고, $\overline{AB}$ = 20cm, $\overline{BD}$ = 12cm 일 때, $\overline{AG}$ 의 길이는? (단, 점 D, E, F 는 접점)



[배점 5, 중상]

① 3 cm ② 4 cm ③ 5 cm

④ 6 cm ⑤ 7 cm

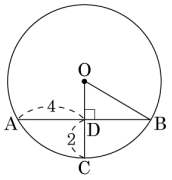
해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = 12\,\text{cm}$ 이므로 $\overline{AF} = 8\,\text{cm}$, $\overline{OF} = 6\,\text{cm}$

△AOF 에서 $\overline{AO} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,\text{cm}$

$\therefore \overline{AG} = 10 - 6 = 4\,\text{cm}$

3. 다음 그림에서 $\overline{AB} \perp \overline{OC}$, $\overline{AD} = 4$, $\overline{CD} = 2$ 일 때, $\overline{OB}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 5

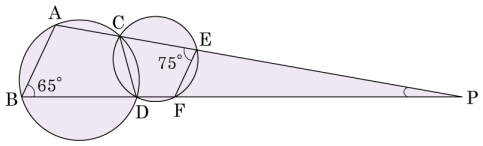
해설

$\overline{OB} = x$ 라 하면 $\overline{OD} = x - 2$ 이고 $\overline{AD} = \overline{DB} = 4$ 이다. $(\therefore \overline{AB} \perp \overline{OD})$

따라서, $x^2 = 4^2 + (x-2)^2$, $x^2 = 16 + x^2 - 4x + 4$, $4x = 20$

$\therefore x = 5$

4. 다음 그림과 같이 두 원이 두 점 C, D에서 만나고, $\angle ABD = 65°$, $\angle CEF = 75°$ 일 때, $\angle EPF$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5, 중상]

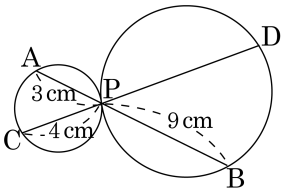
▶ 답:

▷ 정답: 10°

해설

점 C 와 점 D 를 잇는 보조선을 만들면
□ABDC 는 원에 내접하므로
$\angle ABD = \angle DCE = 65°$
□CDFE 도 원에 내접하므로
$\angle DCE = \angle EFP = 65°$
삼각형의 외각의 성질을 이용하여
$\angle EFP + \angle EPF = 75°$
$\therefore \angle EPF = 75° - 65° = 10°$

5. 다음 그림과 같이 점 P 에서 두 원이 접하고, $\overline{AP} = 3\,\text{cm}$, $\overline{BP} = 9\,\text{cm}$, $\overline{CP} = 4\,\text{cm}$ 일 때, $\overline{DP}$ 의 길이를 구하여라.



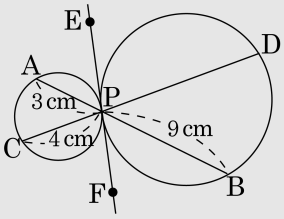
[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 12 cm

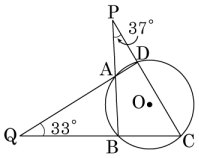
해설

두 원의 공통접선 $\overline{EF}$ 를 그으면
$\angle APE = \angle ACP, \angle FPB = \angle BDP$ 이다.



$\therefore \angle ACP = \angle BDP$
또한, $\angle APC = \angle BPD$ ($\because$ 맞꼭지각) 이다.
$\therefore \triangle APC \equiv \triangle BPD$ (AA 닮음)
따라서 $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PC} : \overline{PD}$ 에서
$\overline{DP} = \dfrac{\overline{PB} \times \overline{PC}}{\overline{PA}} = \dfrac{9 \times 4}{3} = 12\,(\text{cm})$

6. 다음 그림과 같이 원 O 에 내접하는 □ABCD 에서 $\overline{DA}$ 와 $\overline{CB}$ 의 연장선의 교점을 Q , $\overline{BA}$ 와 $\overline{CD}$ 의 연장선의 교점을 P 라 하자. $\angle P = 37°$, $\angle Q = 33°$ 일 때, $\angle BCD$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 55°

해설

$\angle BCD = x$ 라고 하면

$\angle CBP = 180° - 37° - x = 143° - x$

$\angle QDC = 180° - 33° - x = 147° - x$

□ABCD 가 원에 내접하므로

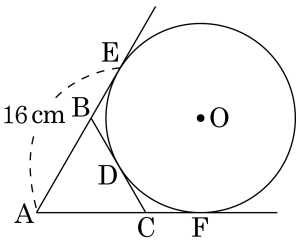
$143° - x + 147° - x = 180°$

$290° - 2x = 180°$

$-2x = -110°$

$\therefore \angle x = 55°$

7. 다음 그림에서 점 D, E, F 는 원 O 의 접점이고 $\overline{AE} = 16\,\text{cm}$ 일 때, △ABC 의 둘레의 길이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

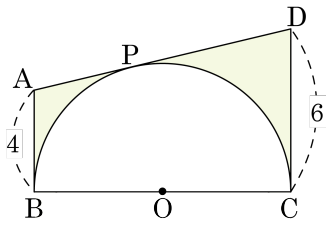
▶ 답:

▷ 정답: 32 cm

해설

$\overline{AE}, \overline{AF}$ 는 원 O 의 접선이므로 $\overline{AE} = \overline{AF}$ 이고 $\overline{BE}, \overline{BD}$ 는 원 O 의 접선이므로 $\overline{BE} = \overline{BD}$ 이다. $\overline{CD}, \overline{CF}$ 는 원 O 의 접선이므로 $\overline{CD} = \overline{CF}$ 이다. 따라서 △ABC 의 둘레의 길이는 $2 \times 16 = 32(\text{cm})$ 이다.

8. 다음 그림에서 $\overline{BC}$ 는 원 O 의 지름이고 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ 는 모두 원 O 의 접선일 때, 색칠한 부분의 둘레는?



[배점 5, 중상]

① 20 ② $10+21\pi$

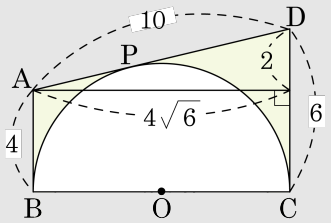
③ $12+2\sqrt{3}\pi$ ④ $20+2\sqrt{6}\pi$

⑤ $20+5\pi$

해설

$\overline{AB}=\overline{AP}, \overline{DP}=\overline{DC}$

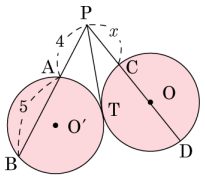
$\overline{AD}=\overline{AP}+\overline{DP}=10$



반원의 둘레는 $\frac{1}{2}\times\pi\times4\sqrt{6}=2\sqrt{6}\pi$

따라서, 색칠한 부분의 둘레는 $2\overline{AD}+\overset{\frown}{BC}=20+2\sqrt{6}\pi$

9. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 두 원 O, O′ 의 공통접선이다. $\overline{PA}=4$, $\overline{AB}=5$ 이고 $\overline{PC}:\overline{CO}=1:2$ 일 때, 원 O 의 넓이는 $\frac{b}{a}\pi$ 라고 한다. 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b는 서로소)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 41

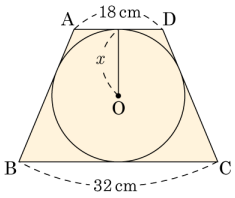
해설

$\overline{PT}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ $4\times9=x\times5x$, $x^2=\frac{36}{5}$

한편, 원의 넓이는 $\frac{36}{5}\pi$ 이다.

따라서 $a+b=36+5=41$ 이다.

10. 다음 그림과 같이 원 O 에 외접하는 등변사다리꼴 ABCD 에서 $\overline{AD} = 18\text{cm}$, $\overline{BC} = 32\text{cm}$ 일 때, 원 O 의 반지름의 길이는?



[배점 5, 중상]

① 12cm ② 13cm ③ 14cm

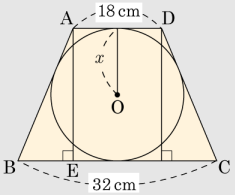
④ 15cm ⑤ $18cm$

해설

$\overline{AB} + \overline{CD} = 18 + 32 = 50(\text{cm})$

□ABCD 는 등변사다리꼴이므로 $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\therefore \overline{AB} = 25(\text{cm})$

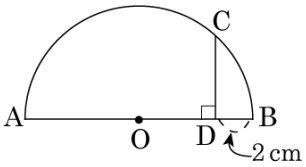


점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 E 라 하면

$\overline{BE} = 7(\text{cm})$ $\therefore \overline{AE} = 2x = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24(\text{cm})$

$\therefore x = 24 \times \frac{1}{2} = 12(\text{cm})$

11. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 는 반지름의 길이가 6 cm 인 반원 O 의 지름이고, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 이다. $\overline{BD} =$ 2 cm 일 때, $\overline{CD}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

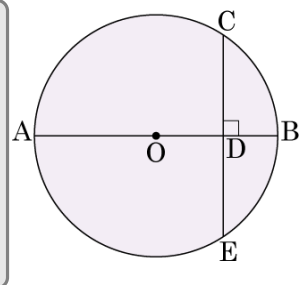
▷ 정답 : $2\sqrt{5}\,\text{cm}$

해설

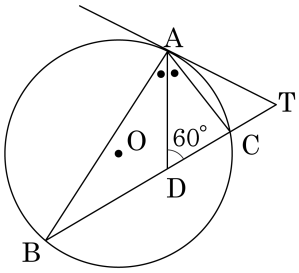
$\overline{ED} = x$ 라 하면

$x^2 = \overline{AD} \times \overline{BD} = 10 \times 2 = 20$

$\therefore x = 2\sqrt{5}\ (\text{cm})\ (\because x > 0)$



12. 다음 그림에서 $\overline{AD}$ 는 $\angle BAC$ 의 이등분선이고, 선분 BC 의 연장선과 점 A 를 접점으로 하는 접선과의 교점을 T 라 한다. $\angle TDA = 60°$ 일 때, $\angle TAD$ 의 크기는?

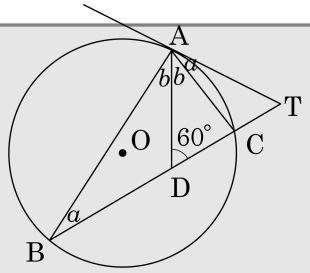


[배점 5, 중상]

① 30° ② 40° ③ 50°

④ 60° ⑤ 70°

해설



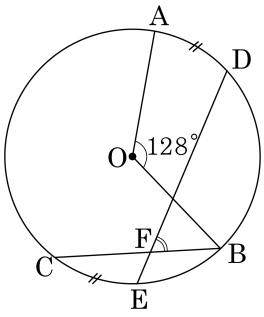
$\angle TAC = \angle ABC = a$

$\angle CAD = \angle BAD = b$

$\triangle ABD$ 에서 $a + b = 60°$

$\therefore\ \angle TAD = a + b = 60°$

13. 다음 그림에서 $\widehat{AD} = \widehat{CE}$ 이고, $\angle AOB = 128°$ 일 때, $\angle DFB$ 의 크기는?

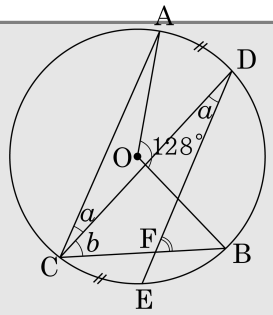


[배점 5, 중상]

① 52° ② 56° ③ 60°

④ 64° ⑤ 68°

해설



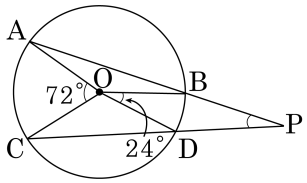
$\angle ACD = a$, $\angle DCB = b$ 라고 하면,

$a + b = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 64°$

$\angle ACD = \angle CDE = a$ 이므로

$\triangle CDF$ 에서 $\angle DFB = a + b = 64°$

14. 다음 그림에서 점 P 는 원 O 의 두 현 AB, CD 의 연장선의 교점이다. $\angle AOC = 72°$, $\angle BOD = 24°$ 일 때, $\angle BPD$ 의 크기는?

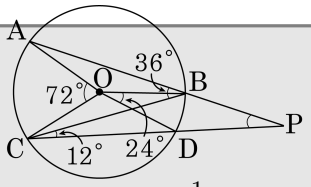


[배점 5, 중상]

① $20°$ ② $22°$ ③ $23°$

④ $24°$ ⑤ $25°$

해설



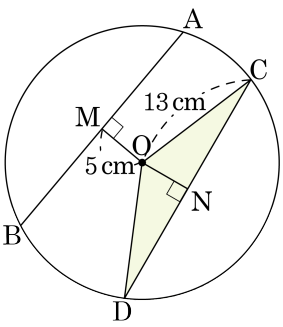
$\angle ABC = \frac{1}{2} \times 72° = 36°$, $\angle BCD = \frac{1}{2} \times 24° = 12°$

$\angle ABC = \angle BCP + \angle BPC$ 이므로

$36° = 12° + \angle BPC$

$\therefore \angle BPC = 24°$

15. 다음 그림의 원 O 에서 색칠한 부분의 넓이는? (단, $\overline{AB} = \overline{CD}$)



[배점 5, 중상]

① $35cm^2$ ② $40cm^2$ ③ $52cm^2$

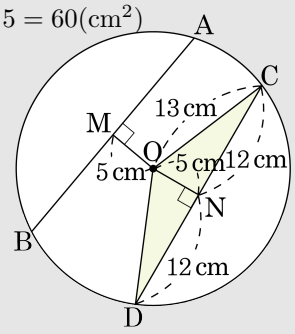
④ $60cm^2$ ⑤ $72cm^2$

해설

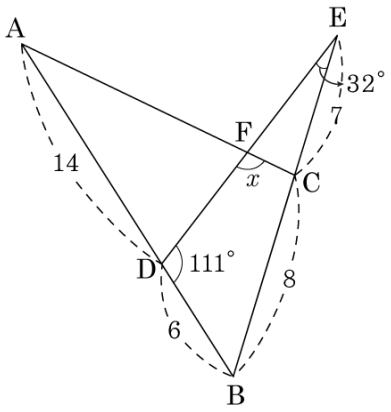
$\overline{AB} = \overline{CD}$ 이므로 $\overline{OM} = \overline{ON} = 5cm$ 이다.

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{CN} = \sqrt{(13)^2 - (5)^2} = 12$ 또한, $\overline{CN} = \overline{DN} = 12cm$

$\therefore \triangle OCD = \frac{1}{2} \times 24 \times 5 = 60(cm^2)$



16. 다음 그림에서 x 의 크기를 구하여라. (단, 단위는 생략한다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 101°

해설

$\overline{BD} \cdot \overline{BA} = \overline{BC} \cdot \overline{BE}$ 이므로

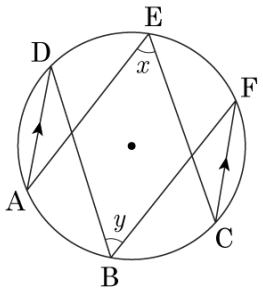
점 A, C, D, E 는 한 원 위의 점이다.

$\angle FEC = \angle FAD = 32°$

$\angle ADF = 180° - 111° = 69°$

$\therefore x = 69° + 32° = 101°$

17. 다음 그림에서 $\overline{AD} // \overline{CF}$ 이고 $\angle ADB = 20°$, $\angle BFC = 22°$ 일 때, $\angle x + \angle y$ 의 크기는?



[배점 5, 중상]

① 65° ② 73° ③ 80°

④ 84° ⑤ 90°

해설

$\overline{EB}$ 를 연결하면

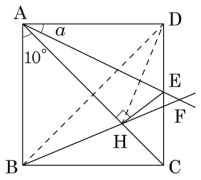
$\angle ADB = \angle AEB = 20°$, $\angle BFC = \angle CEB = 22°$

$\therefore x = 42°$

$\angle y = \angle ADB + \angle BFC = 42°$ ($\because$ 엇각의 성질을 이용)

따라서 $\angle x + \angle y = 84°$ 이다.

18. 정사각형 ABCD 의 변 CD 위의 점 E 에서 대각선 AC 에 내린 수선의 발을 H , 두 선분 AE 와 BH 의 연장선이 만나는 점을 F 라고 하고 $\angle DAE = a$ 라고 할 때, $\angle EHF$ 의 크기를 구하여라.



[배점 5, 중상]

① $5a°$ ② $4a°$ ③ $3a°$

④ $2a°$ ⑤ $a°$

해설

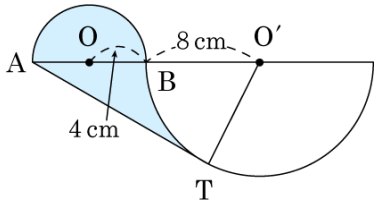
$\angle AHE = \angle ADE = 90°$ 이므로 네 점 A, H, E, D 는 한 원 위에 있다. 따라서 호 $\overset{\frown}{DE}$ 에 대한 원주각은 모두 같으므로, $\angle DAE = \angle DHE = a$ 이다.
$\overline{BD}//\overline{HE}$ 이므로

$$\angle BDC = \angle HEC = 45°,\ \angle DHE = \angle HDB$$

또한, $\overline{HD}=\overline{HB}$ 이므로 $\angle HBD = \angle HDB = a$

$$\therefore\ \angle EHF = \angle HDB = a$$

19. 다음 그림에서 두 반원 O, O′ 의 반지름의 길이는 각각 4 cm, 8 cm 이다. $\overline{AT}$ 가 반원 O′ 의 접선일 때, 색칠한 부분의 넓이는?



[배점 5, 중상]

① $32\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

② $(8\pi + 32\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$

③ $\left(32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$

④ $\left(32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$

⑤ $\left(64 - \frac{8}{3}\pi\right)\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\overline{AT}^2 = 8 \times 24 = 192 \quad \therefore\ \overline{AT} = 8\sqrt{3}(\,\mathrm{cm})$
$\overline{AO'} : \overline{AT} : \overline{O'T} = 2 : \sqrt{3} : 1$ 이므로 $\angle AO'T = 60°$
작은 반원의 넓이는 $\pi \times 4^2 \times \frac{1}{2} = 8\pi(\,\mathrm{cm}^2)$
$\triangle ATO'$ 의 넓이는 $8 \times 8\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 32\sqrt{3}(\,\mathrm{cm}^2)$
부채꼴 O′BT 의 넓이는 $\pi \times 8^2 \times \frac{60°}{360°} = \frac{32}{3}\pi(\,\mathrm{cm}^2)$
따라서 색칠한 부분의 넓이는
$8\pi + (32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi) = (32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi)\,\mathrm{cm}^2$ 이다.