단원 형성 평가

1. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? [배점 3, 중하]

① $\left(\frac{y^2}{x}\right)^3 \times (x^2y^3)^2 = xy^{12}$

② $12x^5 \div (-3xy^2) \times (-y^3)^2 = 4x^4y^4$

③ $\frac{x^4}{y} \times (y^3)^2 \div \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 = y^6$

④ $\left(\frac{b}{a}\right)^3 \times (ab^3)^2 \times a^2 = ab^9$

⑤ $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2^2}{3}\right)^2 = 6$

해설

① $\left(\frac{y^2}{x}\right)^3 \times (x^2y^3)^2 = \frac{y^6}{x^3} \times x^4y^6 = xy^{12}$

② $12x^5 \div (-3xy^2) \times (-y^3)^2$
$= 12x^5 \times \left(\frac{1}{-3xy^2}\right) \times y^6 = -4x^4y^4$

③ $\frac{x^4}{y} \times (y^3)^2 \div \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 = \frac{x^4}{y} \times y^6 \times \frac{y^2}{x^4} = y^7$

④ $\left(\frac{b}{a}\right)^3 \times (ab^3)^2 \times a^2 = \frac{b^3}{a^3} \times a^2b^6 \times a^2 = ab^9$

⑤ $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2^2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3^3}{2^3}\right) \times \left(\frac{2^4}{3^2}\right) = 3 \times 2 = 6$

2. 다음 중 결과가 나머지 것과 다른 것을 골라라.

㉠ a^{2+2+2}	㉡ $a^2 \times a^3$
㉢ $(a^2)^2 \times a^2$	㉣ $a^2 \times a^3 \times a$
㉤ $(a^2)^3$	

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

㉠ $a^{2+2+2} = a^6$

㉡ $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$

㉢ $(a^2)^2 \times a^2 = a^4 \times a^2 = a^6$

㉣ $a^2 \times a^3 \times a = a^{2+3+1} = a^6$

㉤ $(a^2)^3 = a^6$

3. $2^{12} \times 5^{13}$ 은 몇 자리의 수인지 구하여라.

[배점 3, 중하]

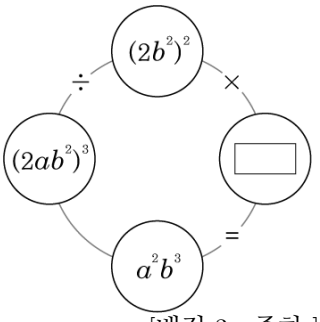
▶ 답:

▷ 정답: 13 자리의 수

해설

$2^{12} \times 5^{13} = 2^{12} \times 5^{12} \times 5 = (2 \times 5)^{12} \times 5$
$= 10^{12} \times 5$

4. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.



[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{b}{2a}$

해설

그림은 원으로 둘러 싸인 식을 정리하면

$(2ab^2)^3 \div (2b^2)^2 \times \square = a^2b^3$ 이다.

$(2ab^2)^3 \div (2b^2)^2 \times \square = a^2b^3$ 을 정리하면

$\square = a^2b^3 \times (2b^2)^2 \div (2ab^2)^3$ 이다.

$a^2b^3 \times 4b^4 \div 8a^3b^6 = 4a^2b^7 \div 8a^3b^6 = \frac{b}{2a}$ 이므로

$\square$는 $\frac{b}{2a}$ 이다.

5. $x+y=3$ 이고, $A = 2^{2x}$, $B = 2^{2y}$ 일 때, AB 의 값은? [배점 4, 중중]

① 2^2 ② 2^4 ③ 2^6

④ 2^8 ⑤ 2^10

해설

$AB = 2^{2x} \times 2^{2y} = 2^{2x+2y} = 2^{2(x+y)} = 2^{2\times 3} = 2^6$ 이다.

6. $(x^a)^4 = x^{16} \div x^a \div x$ 일 때, a 의 값은? [배점 4, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^{4a} = x^{16-a-1} = x^{15-a}$, $4a = 15 - a$

$\therefore\ a = 3$

7. $9^{x+2} = 3^{2x} \times 3^y$ 에서 y 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$9^{x+2} = (3^2)^{x+2} = 3^{2x+4} = 3^{2x+y}$

$2x + 4 = 2x + y$

$\therefore\ y = 4$

8. $(-3x^Ay^2)^2 \times Bx \div (3y^3)^2 = -\frac{9x^3}{y^C}$ 에서 A, B, C 의 값을 각각 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: $A = 1$, $B = -9$, $C = 2$

해설

$(-3x^Ay^2)^2 \times Bx \div (3y^3)^2 = -\frac{9x^3}{y^C}$

$\frac{Bx^{2A+1}}{y^2} = -\frac{9x^3}{y^C}$

$2A + 1 = 3,\ A = 1$

$\therefore A = 1, B = -9, C = 2$

9. 다음 보기 중 계산 결과가 옳은 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $x \times (-2x^2)^2 = 4x^5$

㉡ $(2x)^2 \times (3x)^2 = 12x^4$

㉢ $(-6xy^3) \times \frac{2}{3}x^2y = -4x^3y^4$

㉣ $-3^2x \times 4y = -36xy$

㉤ $\frac{2}{3}x^2yz \times \frac{3}{2}xyz^2 = x^3y^2z^3$

[배점 4, 중중]

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉡ $(2x)^2 \times (3x)^2 = 4x^2 \times 9x^2 = 36x^4$

10. $64^{4x+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-13x}$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

주어진 식의 양변의 밑이 2가 되도록 바꾸면

$(2^6)^{4x+1} = (2^{-2})^{2-13x}$

$2^{24+6} = 2^{-4+26x}$

$24x+6 = -4+26x$

$-2x = -10$

$\therefore\ x = 5$

11. 음이 아닌 수 a, b에 대하여 $2^a + 2^b \le 1 + 2^{a+b}$ (단, 등호는 $a = 0$ 또는 $b = 0$일 때 성립)이 성립한다. $a+b+c = 4$일 때, $2^a + 2^b + 2^c$의 최댓값을 구하여라. (단, $c \ge 0$) [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$2^a + 2^b + 2^c \le 1 + 2^{a+b} + 2^c$ (단, 등호는 $a = 0$ 또는 $b = 0$일 때 성립)

$2^a+2^b+2^c \le 1+(1+2^{a+b+c})$ (단, 등호는 $a+b = 0$ 또는 $c = 0$일 때 성립)

$2^a + 2^b + 2^c \le 1 + (1 + 2^4)$

$2^a + 2^b + 2^c \le 18$

따라서 최댓값은 18 ($a = 0$, $b = 0$ 또는 $b = 0$, $c = 0$ 또는 $c = 0$, $a = 0$ 일 때)

12. $\frac{3^x}{9^{-x+y}} = 27$, $\frac{25^{x+y}}{5^{3y}} = 625$ 일 때, $64^x \times 625^y$ 의 자리의 수를 구하면? [배점 5, 중상]

① 10 자리 ② 12 자리 ③ 17 자리

④ 20 자리 ⑤ 26 자리

해설

$3^x = 27 \times 9^{-x+y} = 3^3 \times 3^{-2x+2y} = 3^{-2x+2y+3}$

$\therefore\ x = -2x + 2y + 3$

$25^{x+y} = 625 \times 5^{3y} = 5^4 \cdot 5^{3y} = 5^{3y+4}$

$\therefore\ 2x + 2y = 3y + 4$

두 식을 연립하면

$x = 5,\ y = 6$

$64^x \times 625^y = (2^6)^5 \times (5^4)^6 = 2^{30} \times 5^{24}$

$= (10)^{24} \times 2^6 = 64 \times 10^{24}$

따라서 26 자리 의 수이다.

13. $5^a \times 9 = 225$, $3 \times 2^b = 192$ 일 때, $a \times b$ 를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

225를 소인수분해 해보면 $3^2 \times 5^2 = 5^a \times 9 = 5^a \times 3^2$

192 를 소인수분해 해보면 $3 \times 2^6 = 3 \times 2^b$

$\therefore\ a = 2, b = 6$

14. $x_1 = 97$, $x_2 = \dfrac{2}{x_1}$, $x_3 = \dfrac{3}{x_2}$, $x_4 = \dfrac{4}{x_3}$, $\cdots$, $x_{10} = \dfrac{10}{x_9}$ 이라 할 때, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{10}$ 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 3840

해설

$x_1 = 97$이고, $x_1 \times x_2 = 2$이고, $x_3 \times x_4 = 4$이다.

따라서 $x_9 \times x_{10} = 10$이 된다.

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \cdots \cdot x_{10}$

$= (x_1 \cdot x_2) \times (x_3 \cdot x_4) \times \cdots \times (x_9 \cdot x_{10})$

$= 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840$

15. $\dfrac{27}{8} \times \square \div \left\{\left(-\dfrac{xy}{2}\right)^3 \times (-3xy^2)^2\right\} = -\dfrac{3}{x^2y^4}$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 식을 고르면?

[배점 5, 중상]

① xy ② x^2y^2 ③ x^3y^3

④ x^4y^4 ⑤ x^5y^5

해설

$\dfrac{27}{8} \times \square \div \left\{\dfrac{-x^3y^3}{8} \times 9x^2y^4\right\} = -\dfrac{3}{x^2y^4}$

$\square = -\dfrac{3}{x^2y^4} \times \dfrac{8}{27} \times \dfrac{-x^3y^3}{8} \times 9x^2y^4$

$\therefore\ \square = x^3y^3$

16. 자연수 n 에 대하여 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의한다. $\dfrac{n^{-1}14!}{n^{-2}} = k^2$ (k 는 자연수)이기 위한 가장 작은 자연수 n 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 858

해설

$\dfrac{n^{-1}14!}{n^{-2}} = \dfrac{n^{-1}}{n^{-2}} \times 14! = n \times 14! = k^2$

$14! = 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2$

$\times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7)$

$= 2^{11} \times 3^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 11 \times 13$

주어진 식이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서는 소인수들의 지수가 짝수가 되어야 하므로 가장 작은 자연수 n 은

$n = 2 \times 3 \times 11 \times 13 = 858$

17. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 넣어라. (단, $\square > 0$)

$$\left(\frac{x^2z^{\square}}{\square y^5}\right)^{\square} = \frac{x^8z^{12}}{16y^{20}}$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : 3
▷ 정답 : 4
▷ 정답 : 2

해설

$2 \times \square = 8, \ \therefore \square = 4$
$\square \times 4 = 12, \ \therefore \square = 3$
$\square^4 = 16, \ \therefore \square = 2$

18. 자연수 n 에 대하여 $f(2^n) = n$ 이라 정의하자. 다음 수 중에서 가장 큰 수를 m , 가장 작은 수를 n 이라 할 때, $f(f(m)) + f(f(n))$ 의 값을 구하여라.

$(4^2)^2, \ (2^2)^{2^2}, \ (2^{2^2})^2, \ 2^{4^2}, \ 4^{2^4}$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : 8

해설

$(4^2)^2 = 2^8 = 2^{2^3}, (2^2)^{2^2} = 2^{2^3}, (2^{2^2})^2 = 2^{2^3}, 2^{4^2} = 2^{2^4}, 4^{2^4} = 2^{2^5}$ 이므로
(가장 큰 수 m) $= 2^{2^5}$, (가장 작은 수 n) $= 2^{2^3}$
$f(m) = f(2^{2^5}) = 2^5, \ f(n) = f(2^{2^3}) = 2^3$ 이므로
$\therefore f(f(m)) + f(f(n)) = f(2^5) + f(2^3) = 5 + 3 = 8$

19. $1 \le (\frac{n}{4})^{200} \le (\frac{27}{16})^{100}$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : 4
▷ 정답 : 5

해설

각 항의 지수를 통일하면
$1^{100} \le (\frac{n^2}{16})^{100} \le (\frac{27}{16})^{100}$
$1 \le \frac{n^2}{16} \le \frac{27}{16}$
$16 \le n^2 \le 27$
따라서 $16 \le n^2 \le 27$ 를 만족하는 자연수 $n = 4, \ 5$ 이다.

20. 자연수 n 에 대하여 $2^n + 3^n$ 의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$, $2^{3n} + 3^{2n}$ 의 일의 자리 숫자를 $g(n)$ 이라고 할 때, $\frac{f(2009)}{g(2009)}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :
▷ 정답 : $\frac{5}{7}$

해설

2^n 의 일의 자리 숫자는 $2, 4, 8, 6$ 이 반복된다.
3^n 의 일의 자리 숫자는 $3, 9, 7, 1$ 이 반복된다.
따라서 $2^n + 3^n$ 의 일의 자리 숫자는 $5, 3, 5, 7$ 이 반복된다.
$\therefore f(2009) = 5$
$2^{3n} + 3^{2n} = 8^n + 9^n$ 이고,
8^n 의 일의 자리 숫자는 $8, 4, 2, 6$ 이 반복된다.
9^n 의 일의 자리 숫자는 $9, 1$ 이 반복된다.
따라서 $8^n + 9^n$ 의 일의 자리 숫자는 $7, \ 5, \ 1, \ 7$ 이 반복된다.
$\therefore g(2009) = 7$
$\frac{f(2009)}{g(2009)} = \frac{5}{7}$

21. $a^2 \div a^{-3} \div \dfrac{1}{a^{-5}} \div \square = a$ $(a \neq 0)$ 일 때, $\square$ 안에 알맞은 식을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $\dfrac{1}{a}$

해설

$a^2 \times \dfrac{1}{a^{-3}} \times a^{-5} \times \dfrac{1}{\square} = a$

$a^2 \times a^3 \times \dfrac{1}{a^5} \times \dfrac{1}{\square} = a$

$\dfrac{1}{\square} = a$

$\therefore \square = \dfrac{1}{a}$

22. 유리수 a, b 에 대하여 $\left(\dfrac{2b}{a}\right)^2 \fallingdotseq \pi$ 이다. 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이와 한 변의 길이가 $2kr$ 인 정사각형의 넓이가 같을 때, 유리수 k 를 a, b 를 사용한 식으로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: $\dfrac{b}{a}$

해설

(반지름의 길이가 r인 원의 넓이) $= \pi r^2$

(한변의 길이가 $2kr$인 정사각형의 넓이)

$= (2kr)^2 = 4k^2r^2$

따라서 $\pi r^2 = 4k^2r^2$

$\left(\dfrac{2b}{a}\right)^2 \fallingdotseq \pi$ 이므로

$\pi r^2 \fallingdotseq \left(\dfrac{2b}{a}\right)^2 r^2 = 4k^2r^2$

$\left(\dfrac{2b}{a}\right)^2 r^2 = 4k^2r^2$

$\left(\dfrac{2b}{a}\right)^2 = 4k^2 = (2k)^2$

$\dfrac{2b}{a} = 2k$

$\therefore k = \dfrac{b}{a}$

23. $f(x) = a^{2x}b^{3x}$ 이고, $f(3x+1) = f(m) \times f^n(x)$ 일 때, $m - n$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$f(x) = a^{2x}b^{3x} = (a^2b^3)^x$ 이므로

(좌변) $= f(3x+1) = (a^2b^3)^{3x+1}$

(우변) $= f(m) \times f^n(x)$

$= (a^2b^3)^m \times ((a^2b^3)^x)^n$

$= (a^2b^3)^m \times (a^2b^3)^{nx}$

$= (a^2b^3)^{nx+m}$

따라서 $3x+1 = nx+m$, $n = 3$, $m = 1$ 이다.

$\therefore m - n = 1 - 3 = -2$

24. 자연수 n 에 대하여 2^n, 3^n, 4^n, 5^n 각각의 일의 자리 숫자의 합을 $f(n)$ 이라 정의하고, $g(n) = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 이라 정의할 때, $f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100))$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1808

해설

2^n 의 일의 자리 숫자는 2, 4, 8, 6 이 반복되고
3^n 의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1 이 반복되고
4^n 의 일의 자리 숫자는 4, 6 이 반복되고
5^n 의 일의 자리 숫자는 5 이다.
$g(1), g(2), g(3), \cdots$ 는 각각 1, 2, 6, 24, 120, 720, $\cdots$ 에서 보듯이 $g(4)$ 부터는 모두 4 의 배수이다.
따라서
$f(g(1)) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$
$f(g(2)) = 4 + 9 + 6 + 5 = 24$
$f(g(3)) = 4 + 9 + 6 + 5 = 24$
$f(g(4)) = f(g(5)) = f(g(6)) = \cdots = f(g(100))$
$= 6 + 1 + 6 + 5 = 18$
$\therefore f(g(1)) + f(g(2)) + f(g(3)) + \cdots + f(g(100))$
$= 14 + 24 + 24 + 18 \times 97 = 1808$

25. 자연수 n 을 7 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 정의할 때, $f(8^{12} \times 25^{18})$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$8^{12} \times 25^{18} = (2^3)^{12} \times (5^2)^{18} = 2^{36} \times 5^{36} = 10^{36}$
이므로 $f(8^{12} \times 25^{18}) = f(10^{36})$
10 을 7 로 나눈 나머지는 3 이므로 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 $3^{36} = (3^2)^{18} = 9^{18}$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
또, 9 를 7 로 나눈 나머지는 2 이므로 9^{18} 을 7 로 나눈 나머지는 $2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$ 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
또, 8 을 7 로 나눈 나머지는 1 이므로 8^6 을 7 로 나눈 나머지는 1^6 을 7 로 나눈 나머지와 같다.
따라서 10^{36} 를 7 로 나눈 나머지는 1,
즉 $f(10^{36}) = 1$