실력 확인 문제

1. 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 48 cm, 64 cm, 80 cm 인 직육면체 모양의 상자를 크기가 같은 정육면체 상자들로 빈틈없이 채우려고 한다. 정육면체의 개수를 가능한 적게 하려고 할 때, 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 cm

해설

정육면체가 개수가 가능한 적어야 하고, 상자의 빈틈이 없도록 채워야하므로, 주어진 세 모서리의 최대공약수를 구해야 한다.
따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는
$48 = 2^4 \times 3$, $64 = 2^6$, $80 = 2^4 \times 5$ 의 최대공약수
$2^4 = 16(\text{cm})$

2. 다음 중 소수가 아닌 것은? [배점 3, 하상]

① 7 ② 11 ③ 13 ④ 19 ⑤ 21

해설

소수는 1 보다 큰 자연수 중 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.
$21 = 3 \times 7$ 이므로 소수가 아니다.

3. 세 자연수 $5 \times a$, $7 \times a$, $3 \times a$ 의 최소공배수가 420 일 때, a 의 값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a)\ 5 \times a \quad 7 \times a \quad 3 \times a$
$\quad\quad 5 \quad\quad 7 \quad\quad 3$
$a \times 5 \times 7 \times 3 = 420$
$\therefore\ a = 4$

4. 집합 $X = \{a, b\}$ 에서 a, b 의 최대공약수는 4 , 두 수의 곱이 96 일 때, 집합 X 의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2 개

해설

a, b 의 최대공약수가 4 이므로
$a = 4x$, $b = 4y$ (x , y 는 서로소, $x < y$)라 하면
$4x \times 4y = 96$ 이다. 따라서 $x \times y = 6$
즉, (x , y)는 $(1, 6), (2, 3)$ 이므로 (a, b) 는
$(4, 24), (8, 12)$ 이다.
따라서 $X = \{4, 24\}$ 또는 $X = \{8, 12\}$ 이므로 집합 X 는 2 개이다.

5. a 와 12 의 공배수가 12 의 배수와 같을 때, 다음 중 a 의 값이 될 수 없는 것은? [배점 3, 중하]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

a 와 12 의 공배수가 12 의 배수와 같다는 것은 a 와 12 의 최소공배수가 12 이라는 뜻이므로
a 와 12 의 최소공배수가 12 가 나오기 위해서는 a 가 12 의 약수가 되어야 한다.
24 는 12 의 약수가 아니고 a 가 24 가 될 경우 24 와 12 의 최소공배수는 24 이므로 24 가 아니다.

6. 한 변의 길이가 $111_{(2)}$ 인 정사각형의 둘레의 길이를 이진법으로 나타내면? [배점 3, 중하]

① $11100_{(2)}$ ② $11001_{(2)}$ ③ $11000_{(2)}$
④ $10101_{(2)}$ ⑤ $1111_{(2)}$

해설

• 정사각형 한 변의 길이 : $111_{(2)} = 7$
• 정사각형의 둘레의 길이 : $28 = 11100_{(2)}$

2) 28
2) 14 … 0
2) 7 … 0
2) 3 … 1
2) 1 … 1
0 … 1

7. 어떤 학교에 남자 260 명, 여자 273 명의 신입생이 들어왔다고 한다. 반별 인원수가 같고 각 반에 속한 남녀의 비가 같도록 반을 나누려고 할 때, 최대 몇 반까지 나오는가? [배점 4, 중중]

① 14반 ② 13반 ③ 12반
④ 11반 ⑤ 10반

해설

짤 수 있는 반의 수를 x 라 할 때,
$260 = x \times \square,\ 273 = x \times \triangle$
x는 260 과 273 의 최대공약수
$260 = 2^2 \times 5 \times 13,\ 273 = 3 \times 7 \times 13$
$\therefore x = 13$

8. 빨간색 리본 1.05 m , 파란색 리본 1.35 m , 노란색 리본 1.5m 가 있다. 리본을 cm 단위로 잘라 될 수 있는 대로 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 몇 명의 학생들에게 리본을 색깔별로 몇 cm 씩 나누어 줄 수 있는지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 명 , 빨간색 리본 : 7 cm , 파란색리본 : 9 cm 노란색 리본 : 10 cm

해설

105, 135, 150 의 최대공약수는 15 이고 $105 \div 15 = 7, 135 \div 15 = 9, 150 \div 15 = 10$ 이므로 15 명에게 빨간색 리본 7cm , 파란색 리본 9cm , 노란색 리본 10cm 씩 나누어 줄 수 있다.

9. 다음 중 옳은 것은?

㉠ 가장 작은 소수는 1 이다. ㉡ 11 과 19 는 소수이다. ㉢ 두 자연수가 서로소이면 공약수는 1 뿐이다. ㉣ 두 소수는 항상 서로소이다. ㉤ 5 보다 크고 10 보다 작은 자연수 중 4 와 서로소인 수는 없다.

[배점 4, 중중]

① ㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢

③ ㉡,㉢,㉣ ④ ㉠,㉡,㉢,㉣

⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉤

해설

㉠ 가장 작은 소수는 2 이다.
㉤ 5 보다 크고 10 보다 작은 자연수 중 4 와 서로소인 수는 7, 9 이다.

10. 두 자연수 A 와 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 최소공배수가 $2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 일 때, 가능한 A 의 개수는? [배점 4, 중중]

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개

④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$A = a \times b \times c \times d$ 라 하면

$$\frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{a \times b \times c \times d} \Big/ 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$\therefore\ a = 2^5,\ b = 1,\ 3,\ 3^2,\ c = 1,\ 5,\ d = 7$
따라서, A 는 $2^5 \times 7,\ 2^5 \times 5 \times 7,\ 2^5 \times 3 \times 7,$
$2^5 \times 3 \times 5 \times 7,\ 2^5 \times 3^2 \times 7,\ 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 의 6 개이다.

11. 다음과 같은 집합의 부분집합의 개수는?

$\{x \mid x$는 220의 소인수$\}$

[배점 4, 중중]

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개

④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

220 을 소인수분해하면 $220 = 2^2 \times 5 \times 11$
$\{2,\ 5,\ 11\}$ 의 부분집합의 개수는
$2^3 = 8$ (개)

12. 2^7-1 을 이진법으로 나타내면 몇 자리의 수가 되는가? [배점 5, 중상]

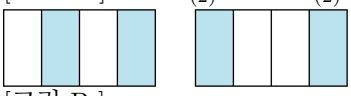
① 네 자리의 수 ② 다섯 자리의 수
③ 여섯 자리의 수 ④ 일곱 자리의 수
⑤ 여덟 자리의 수

해설

$2^7-1=128-1=127$ 이고
$127=1111111_{(2)}$ 이므로 일곱 자리의 수가 된다.

13. [그림 A]는 ㉠ $101_{(2)}$ 과 ㉡ $1001_{(2)}$ 를 나타내는 그림이다. [그림 B]에 어떤 상품을 A와 같이 상품정보를 표시하였을 때 상품명의 번호를 A, 제조월을 B, 제조일을 C라 할 때, A + B + C의 값을 구하여라.

[그림 A] ㉠ $101_{(2)}$ ㉡ $1001_{(2)}$



[그림 B]

<상품 코드>
4 . 공책 5 . 지우개 6 . 연필
7 . 볼펜 11 . 수첩 13 . 앨범

[배점 5, 중상]

▶ 답 :
▷ 정답 : 42

해설

상품명 : $A=111_{(2)}=2^2+2+1=7$
제조월 : $B=1011_{(2)}=2^3+2+1=11$
제조일 : $C=11000_{(2)}=2^4+2^3=16+8=24$
$\therefore A+B+C=7+11+24=42$

14. 자연수 a, b, c 에 대하여 $5\times a=7\times b=c^2$ 을 만족하는 c 의 값으로 가능하지 <u>않은</u> 것은? [배점 5, 중상]

① 35 ② 70 ③ 105
④ 140 ⑤ 180

해설

$5\times a=7\times b=c^2$ 에서
i) $a=5\times 7^2$, $b=5^2\times 7$ 일 때, $5\times(5\times 7^2)=7\times(5^2\times 7)=(5\times 7)^2=35^2$
ii) $a=2^2\times 5\times 7^2$, $b=2^2\times 5^2\times 7$ 일 때, $5\times(2^2\times 5\times 7^2)=7\times(2^2\times 5^2\times 7)=(2\times 5\times 7)^2=70^2$
iii) $a=3^2\times 5\times 7^2$, $b=3^2\times 5^2\times 7$ 일 때, $5\times(3^2\times 5\times 7^2)=7\times(3^2\times 5^2\times 7)=(3\times 5\times 7)^2=105^2$
iv) $a=4^2\times 5\times 7^2$, $b=4^2\times 5^2\times 7$ 일 때, $5\times(4^2\times 5\times 7^2)=7\times(4^2\times 5^2\times 7)=(4\times 5\times 7)^2=140^2$

따라서 c 의 값으로 가능한 것은 $35, 70, 105, 140, \cdots$ 이다.

15. 다음 수 중에서 가장 큰 수는? [배점 5, 중상]

① 2^4 ② $10001_{(2)}$
③ 4^2 ④ $10110_{(2)}$
⑤ $2\times 10+3$

해설

① $2^4=16$
② $10001_{(2)}=1\times 2^4+1\times 1=17$
③ $4^2=16$
④ $10110_{(2)}=1\times 2^4+1\times 2^2+1\times 2=16+4+2=22$
⑤ $2\times 10+3=23$

16. 두 자연수 $84\times a$ 와 $2^2\times 7\times 10\times a$ 의 공약수가 12 개일 때 최소의 a 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$84\times a = 2^2\times 3\times 7\times a$, $2^2\times 7\times 10\times a = 2^3\times 5\times 7\times a$
두 수의 최대공약수는 $2^2\times 7\times a$,
공약수의 개수, 즉 최대공약수의 약수가 12 개이므로
최대공약수는 $2^3\times 7^2$ 또는 $2^2\times 7^3$ 또는 $2^2\times 7\times x$ (단, x 는 2, 7 이 아닌 소수) 이다.
최소의 a 값이므로 $a=3$ 이다.

17. 자연수 n 의 일의 자리 숫자를 $P(n)$ 이라고 할 때, $P(4^{101})+P(7^{99})$ 을 구하여라. [배점 5, 상하]

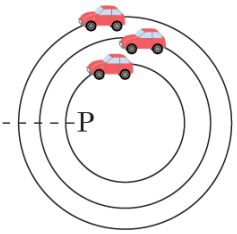
▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$4=4$
$4^2=16$
$4^3=64$
$7=7$
$7^2=49$
$7^3=343$
$7^4=2401$
위에서 알 수 있듯이 일의 자리 숫자는 각각 4 의 거듭제곱은 4, 6 이 반복되며, 7 의 거듭제곱은 7, 9, 3, 1 이 반복된다.
$101\div 2 = 50\cdots 1$, $99\div 4 = 24\cdots 3$
그러므로 $P(4^{101})+P(7^{99}) = 4+3=7$ 이다.

18. 장난감 자동차 세 대가 다음 그림과 같은 원을 따라 각각의 원주 위를 일정한 속력으로 돌고 있다. 18분 동안 A자동차는 24바퀴를 돌고, B자동차는 36바퀴, C자동차는 45바퀴를 돈다. 세 자동차가 동시에 P지점에서 출발하여 1시간 10분 동안 일정한 속도로 돌았다면 동시에 P지점을 몇 번 통과하는가? [배점 5, 상하]



① 9번 ② 10번 ③ 11번
④ 12번 ⑤ 13번

해설

A, B, C 세 자동차가 한 바퀴를 도는 데 걸리는 시간은 $\frac{18}{24}$분, $\frac{18}{36}$분, $\frac{18}{45}$분이다.
$\frac{18}{24}$분 $=45$초, $\frac{18}{36}$분 $=30$초, $\frac{18}{45}$분 $=24$초 이다.
45, 30, 24 의 최소공배수는 360 이므로
360초 $=6$분마다 한 번씩 P지점을 통과한다.
따라서 $70\div 6 = 11\cdots 4$ 이므로 11번 통과한다.

19. 소인수분해를 이용하여 다음 수들의 최소공배수와 최대공약수를 알맞게 짝지은 것을 골라라.

45, 60, 90

[배점 5, 상하]

① 최대공약수 : 15 , 최소공배수 : 90

② 최대공약수 : 15 , 최소공배수 : 180

③ 최대공약수 : 30 , 최소공배수 : 180

④ 최대공약수 : 45 , 최소공배수 : 90

⑤ 최대공약수 : 45 , 최소공배수 : 180

해설

$45 = 3^2 \times 5$
$60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$90 = 2 \times 3^2 \times 5$
$2^2 \times 3^2 \times 5$

최대공약수 : $3 \times 5 = 15$
최소공배수 : $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

20. 숫자 카드 1, 3, 5, 7, 9 중에서 3 장을 골라 세 자리 수를 만들 때, 만든 수 중 3 의 배수의 개수를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24 개

해설

3 의 배수는 각 자리 수를 모두 더한 값이 3 의 배수이다.
1, 3, 5, 7, 9 로 만든 세 수를 더하여 3 의 배수의 되는 조합은,
$(1, 3, 5)$, $(1, 5, 9)$, $(3, 5, 7)$, $(5, 7, 9)$ 이다.
$\therefore$ 3 의 배수의 개수$= 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24$(개)