

단원 종합 평가

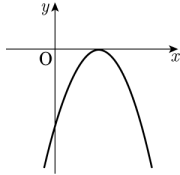
1. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에 대한 설명이다. 옳지 않은 것은?
[배점 3, 중하]

- ① 원점을 꼭짓점으로 한다.
- ② 아래로 볼록인 포물선이다.
- ③ $x = 0$ 을 축으로 한다.
- ④ $y = 2x^2$ 보다 폭이 넓다.
- ⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2$ 과는 y 축에 대한 대칭이다.

해설

- ⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2$ 과는 x 축에 대한 대칭이다.

2. 이차함수 $y = a(x+p)^2$ 의 그래프가 다음과 같을 때, a 와 p 의 부호를 구하여라.



[배점 3, 중하]

- ▶ 답:
- ▶ 답:
- ▷ 정답: $a < 0$
- ▷ 정답: $p < 0$

해설

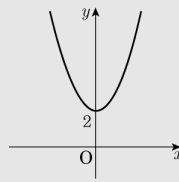
그래프가 위로 볼록하므로 $a < 0$, 축이 y 축의 오른쪽에 있으므로 $p < 0$ 이다.

3. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ 의 치역은?
[배점 3, 중하]

- ① $\{y \mid y \geq 2\}$
- ② $\{y \mid y \leq 2\}$
- ③ $\{y \mid y \geq -8\}$
- ④ $\{y \mid y \leq -8\}$
- ⑤ $\{y \mid y \geq 0\}$

해설

$y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



4. 지면으로부터 30m 높이의 건물 옥상에서 초속 20m 로 똑바로 위로 던져 올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x + 30$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라.
[배점 3, 중하]

- ▶ 답:
- ▶ 답:
- ▷ 정답: 2 초
- ▷ 정답: 50 m

해설

$y = -5x^2 + 20x + 30$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 50$ 이다.

따라서 $x = 2$ 일 때, y 는 최댓값 50 을 갖는다.

5. 이차함수 $y = -2x^2 + 8x + k$ 의 최댓값이 2 일 때, k 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x + k \\ &= -2(x^2 - 4x + 4 - 4) + k \\ &= -2(x - 2)^2 + 8 + k \\ x &= 2 \text{ 일 때, 최댓값 } 8 + k \text{ 를 갖는다.} \\ \therefore 8 + k &= 2, k = -6 \end{aligned}$$

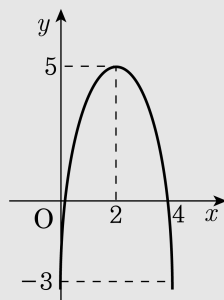
6. 이차함수 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 제 2 사분면

해설

이차함수 $y = -2x^2 + 8x - 3$ 의 그래프는 $y = -2(x - 2)^2 + 5$ 이고 꼭짓점의 좌표가 (2, 5), 축의 방정식이 $x = 2$, 위로 볼록인 그래프이다.
 $y = -2(x - 2)^2 + 5$ 의 그래프를 그리면,



따라서, 제 2 사분면을 지나지 않는다.

7. 다음 중 이차함수 $y = -\frac{3}{4}x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?(정답 2 개)

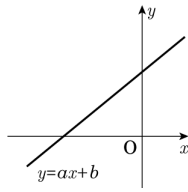
[배점 4, 중중]

- ① (2, -3) 을 지난다.
- ② 축의 방정식은 $y = 0$ 이다.
- ③ 치역은 $\{y|y \leq 0\}$ 이다.
- ④ 제 3, 4 사분면을 지난다.
- ⑤ x 의 값이 증가할 때, y 값도 증가한다.

해설

- ① (2, -3) 을 대입하면 식을 만족하므로 지난다.
- ② 축은 $x = 0$ 이므로 옳지 않다.
- ③ 위로 볼록하고 꼭짓점이 원점이므로 $y \leq 0$
- ④ 위로 볼록, 꼭짓점이 원점인 그래프를 그리면 제3, 4 분면을 지난다.
- ⑤ x 값이 증가할 때 y 값은 감소한다.

8. 다음 그림은 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이 때, 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 모양은?



[배점 4, 중중]

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설

일차함수 $y = ax + b$ 의 기울기는 양수이고, y 절편도 양수이므로 $a > 0$, $b > 0$ 이다.
따라서 $y = ax^2 + b$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 y 절편이 양수인 그래프이다.

9. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + m$ 의 그래프가 제2 사분면을 제외한 모든 사분면을 지나도록 하는 m 의 값의 범위는?
[배점 4, 중중]

- ① $m > -9$ ② $-9 < m \leq 0$
③ $m \geq 0$ ④ $0 \leq m < 9$
⑤ $m > 9$

해설

$$y = -(x - 3)^2 + m + 9$$

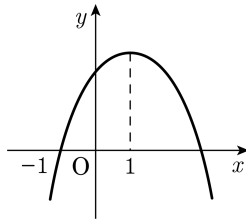
꼭짓점이 제1 사분면에 있고, y 절편이 음수여야 하므로

$$m \leq 0$$

$$m + 9 > 0$$

$$\therefore -9 < m \leq 0$$

10. 다음 그림은 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 다음 중 옳지 않은 것은?



[배점 4, 중중]

- ① $ab < 0$ ② $bc > 0$
 ③ $ac > 0$ ④ $abc < 0$
 ⑤ $a + b + c > 0$

해설

그래프가 위로 볼록하므로 $a < 0$
 축이 y 축을 기준으로 오른쪽에 있으므로 a 와 b 의 부호는 반대이다. 따라서 $b > 0$ 이다.
 y 절편이 양수이므로 $c > 0$ 이다.
 ⑤ $y = ax^2 + bx + c$ 에서 $x = 1$ 일 때 $a + b + c = y$ 이고 y 좌표는 양수이므로 $a + b + c > 0$ 이다.

11. 포물선 $y = (x + a - 1)^2 + (a^2 - 3a - 10)$ 의 꼭짓점이 $(2, k)$ 일 때, k 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : -6

해설

꼭짓점의 좌표 $(1 - a, a^2 - 3a - 10)$ 이 $(2, k)$ 이므로
 $1 - a = 2$
 $\therefore a = -1$
 $a^2 - 3a - 10$ 에 $a = -1$ 을 대입하면
 $1 + 3 - 10 = k$
 $\therefore k = -6$

12. 이차함수 $y = a(x + 3)^2 - 2$ 의 그래프는 이차함수 $y = -(x + b)^2 + c$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다. 이때, 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값은?

[배점 5, 중상]

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = -(x + 5 + b)^2 + c - 4 = a(x + 3)^2 - 2$ 에서
 $a = -1, 5 + b = 3, c - 4 = -2$
 $\therefore a = -1, b = -2, c = 2$
 따라서 $a + b + c = -1$ 이다.

13. $y = 2x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $A(2, p), B(q, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은?(단, $q < 0$)

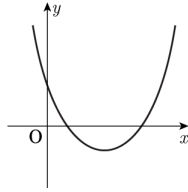
[배점 5, 중상]

- ① $y = 2x - 3$ ② $y = -2x + 3$
 ③ $y = 2x + 4$ ④ $y = -2x + 4$
 ⑤ $y = 2x - 4$

해설

$(2, p)$ 를 $y = 2x^2$ 에 대입하면 $p = 2 \times 2^2 = 8$
 $(q, 2)$ 를 대입하면 $2 = 2q^2, q^2 = 1$ 에서 $q = \pm 1$
 그런데 $q < 0$ 이므로 $q = -1$
 $(2, 8), (-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은
 (기울기) $= \frac{8 - 2}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2$
 $y = 2x + b$ 에 $(2, 8)$ 을 대입하면
 $8 = 2 \times 2 + b \therefore b = 4$
 따라서 구하는 식은 $y = 2x + 4$

14. 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 이차함수 $y = p(x - q)^2 + a$ 의 그래프가 지나가는 사분면을 모두 고르면?



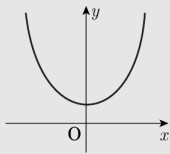
[배점 5, 중상]

- ① 제1, 2 사분면
 ② 제3, 4 사분면
 ③ 제1, 2, 4 사분면
 ④ 제2, 3, 4 사분면
 ⑤ 제1, 2, 3, 4 사분면

해설

이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 는 아래로 볼록하고, 꼭짓점 (p, q) 가 x 축 위에 있으므로 $a > 0$, $p > 0$, $q = 0$ 이다.

$y = p(x - q)^2 + a$ 의 그래프는 아래 그래프와 같다. 따라서 이차함수 $y = p(x - q)^2 + a$ 의 그래프가 지나가는 사분면은 제1, 2 사분면이다.



15. 정의역이 $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ 인 이차함수 $y = x^2 + 3x - 4$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

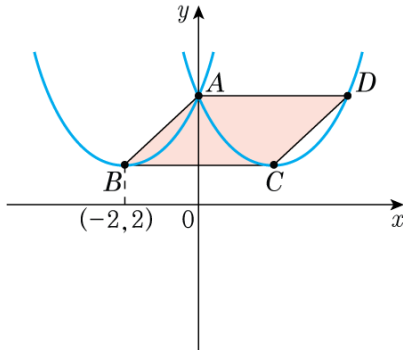
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = x^2 + 3x - 4 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ 는 $x = -\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값이 $-\frac{25}{4}$ 인데 정의역 $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ 의 범위일 때의 최솟값은 $x = -1$ 일 때 -6 이고, $x = 3$ 일 때 최댓값은 14 이다. 따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-6 + 14 = 8$ 이다.

16. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 것이다. 이 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라. (단, 점 B와 C는 두 포물선의 꼭짓점이다.)



[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동 시키면 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$ 이다. 꼭짓점이 $(-2, 2)$ 에서 $(2, 2)$ 로 변화였고 점 A의 좌표는 $(0, 4)$ 이므로 평행사변형의 가로의 길이는 4, 높이는 2이다. 따라서 넓이는 $4 \times 2 = 8$ 이다.

17. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동하였더니 $y = -3x^2 + bx - 5$ 가 되었다. $a + b - c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} y &= a(x-2)^2 + c \\ &= ax^2 - 4ax + 4a + c \\ &= -3x^2 + bx - 5 \end{aligned}$$

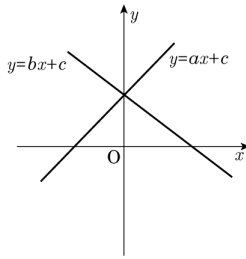
$$a = -3$$

$$b = -4a = 12$$

$$4a + c = -12 + c = -5, c = 7$$

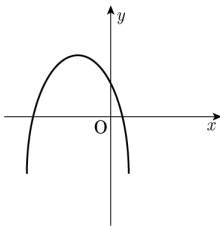
$$\therefore a + b - c = -3 + 12 - 7 = 2$$

18. 두 일차함수 $y = ax + c$, $y = bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = ax^2 - bx - c$ 의 그래프로 적당한 것을 고르시오.

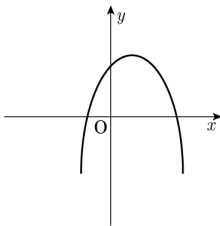


[배점 5, 상하]

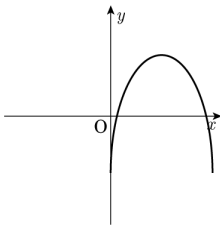
①



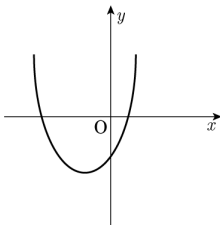
②



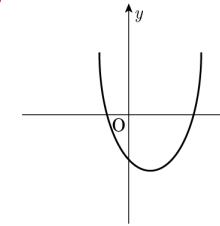
③



④



⑤



해설

$y = ax + c$ 에서 $a > 0$, $c > 0$
 $y = bx + c$ 에서 $b < 0$, $c > 0$ 이므로

19. 두 변의 길이가 10 인 직각이등변삼각형에 내접하는 직사각형의 넓이가 최대일 때, 직사각형의 둘레의 길이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 직사각형의 넓이를 y 라고 하자.

직사각형 부분을 제외하고 남은 세 삼각형은 모두 직각이등변삼각형이므로 직사각형의 가로 길이는 $(10 - x)$ 이다.

$\therefore y = x(10 - x) = -x^2 + 10x = -2(x - 5)^2 + 25$
 따라서 직사각형의 세로의 길이가 5, 가로의 길이가 5 일 때, 넓이가 최대이므로
 둘레의 길이는 $2(5 + 5) = 20$ 이다.

20. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4 를 갖는 이차함수의 식은?

[배점 5, 상하]

① $y = 2(x - 1)^2$

② $y = 2(x - 1)^2 + 4$

③ $y = 2(x + 1)^2 + 4$

④ $y = -2(x + 1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x - 1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로 $y = 2(x + 1)^2 + 4$

21. $y = -x^2 + 6x + k$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나고, 두 교점 사이의 거리가 8일 때, k 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

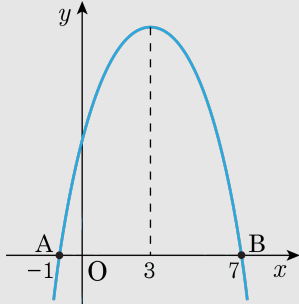
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$y = -x^2 + 6x + k = -(x^2 - 6x + 9 - 9) + k = -(x - 3)^2 + 9 + k$$

축의 방정식은 $x = 3$



그림에서 보면 $\overline{AB} = 8$ 이므로 A, B 는 축 $x = 3$ 에서 각각 4 만큼 떨어져 있어야 한다.

따라서 A, B 의 x 좌표는 각각 $-1, 7$ 이다.

즉 x 절편이 $-1, 7$ 이므로 식은 $y = -(x+1)(x-7)$ 전개하면 $y = -x^2 + 6x + 7 \therefore k = 7$

해설

x 축과의 교점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 α, β 는 $0 = -x^2 + 6x + k$ 의 두 근이다.

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = -k$

두 점 사이의 거리 $|\alpha - \beta| = 8, |\alpha - \beta|^2 = 8^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$64 = 36 + 4k, 4k = 28 \therefore k = 7$

22. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.
[배점 5, 상하]

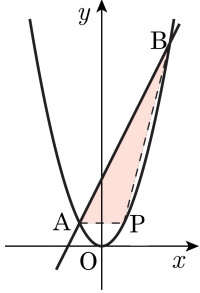
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$ 따라서 y 의 절편은 2 이다.

23. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점을 A, B 라하고, 원점을 O 라 한다. 점 P 가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B 까지 움직일 때, $\triangle APB$ 의 넓이와 $\triangle OAB$ 의 넓이가 같게 되는 점 P 의 좌표를 구하여라.



[배점 6, 상중]

- ① (1, 1) ② (1, 2) ③ (2, 1)
 ④ (2, 2) ⑤ (3, 2)

해설

$\triangle APB$ 와 $\triangle AOB$ 의 넓이가 같으면 직선 AB 와 직선 OP 는 평행하므로

직선 OP 의 기울기는 2 이고 직선 OP 는 $y = 2x$ 이다. 점 P 의 좌표는 $y = x^2$ 과 $y = 2x$ 의 교점 이므로

$$x^2 = 2x, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 0, y = 0 \text{ (원점)}$$

그런데 P는 원점이 아니므로 P(2, 2)

24. 두 이차함수 $y = 3x^2$, $y = 2x^2 + 10$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중, x, y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 35 개

해설

두 그래프의 교점의 x 좌표를 구하면

$$3x^2 = 2x^2 + 10$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{10}$$

이때, 두 그래프로 둘러싸인 영역의 x 좌표의 범위가 $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$ 이고,

y 좌표의 범위는 $3x^2 < y < 2x^2 + 10$

정수인 x 좌표는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

(1) $x = \pm 3$ 일 때, $27 < y < 28$ 이므로 정수인 y 는 없다.

(2) $x = \pm 2$ 일 때, $12 < y < 18$ 이므로 $y = 13, 14, 15, 16, 17$

(3) $x = \pm 1$ 일 때, $3 < y < 12$ 이므로 $y = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

(4) $x = 0$ 일 때, $0 < y < 10$ 이므로 $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

따라서, x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $2 \times (5 + 8) + 9 = 35$ (개)이다.

25. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ 의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 3개를 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

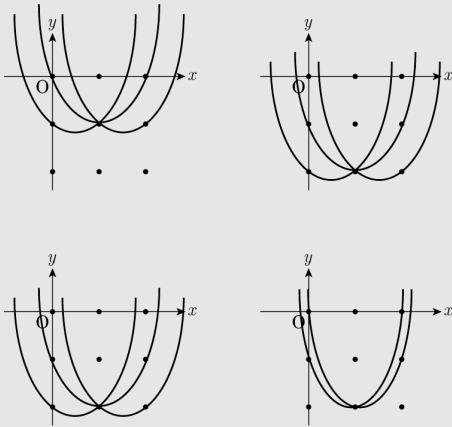
▷ 정답 : 22 개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2이고

y 좌표가 될 수 있는 정수는 $-2, -1, 0$ 이다.

포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 11 개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 11 개의 포물선을 그릴 수 있다.

따라서 구하는 포물선의 개수는 22 개이다.