

단원 종합 평가

1. 이차함수 $y = -x^2 + 4$ 의 그래프에서 꼭짓점의 좌표와 축으로 옳은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $(0, 4), x = 4$ ② $(0, -4), x = -4$
 ③ $(0, 4), x = 0$ ④ $(4, 0), x = 4$
 ⑤ $(4, 0), x = 0$

해설

꼭짓점의 좌표는 $(0, 4)$ 이고, 축은 $x = 0$ 이다.

2. 포물선 $y = ax^2 + 9x + 12$ 가 x 축과 두 점 $A(-1, 0)$, $B(b, 0)$ 에서 만날 때, b 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :
 ▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 9x + 12 \\ &= a(x+1)(x-b) \\ &= ax^2 + a(1-b)x - ab \\ a(1-b) &= 9, -ab = 12 \\ a(1-b) &= a - ab = a + 12 = 9 \text{ 이므로} \\ \therefore a &= -3, b = 4 \end{aligned}$$

3. 합이 22 인 두 수의 곱의 최댓값과, 곱이 최대일 때의 두 수를 차례대로 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▷ 정답 : 두 수의 곱의 최댓값 : 121
 ▷ 정답 : 11
 ▷ 정답 : 11

해설

두 수를 $x, 22 - x$ 라 하고, 두 수의 곱을 y 라고 하면
 $y = x(22 - x) = -x^2 + 22x = -(x - 11)^2 + 121$
 즉, $x = 11$ 일 때, 최댓값 121 을 갖는다.
 따라서 최댓값은 121, 두 수는 11, 11 이다.

4. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 $x = -2$ 일 때, 최솟값 3 을 갖는다. 이 때, ab 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :
 ▷ 정답 : 28

해설

$$\begin{aligned} x &= -2 \text{ 일 때, 최솟값 } 3 \text{ 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 } (-2, 3) \\ y &= (x+2)^2 + 3 \\ &= x^2 + 4x + 7 \\ &= x^2 + ax + b \\ \therefore a &= 4, b = 7 \\ \therefore ab &= 4 \times 7 = 28 \end{aligned}$$

5. 이차함수 $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 - 3$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 짝지은 것이 옳은 것은?

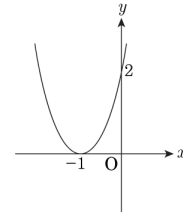
[배점 4, 중중]

- ① 꼭짓점의 좌표 : (1, 4) , 축의 방정식 : $x = 1$
 ② 꼭짓점의 좌표 : (2, -1) , 축의 방정식 : $x = 2$
 ③ 꼭짓점의 좌표 : (-1, -3) , 축의 방정식 : $x = -1$
 ④ 꼭짓점의 좌표 : (-1, 4) , 축의 방정식 : $x = -1$
 ⑤ 꼭짓점의 좌표 : (-2, -3) , 축의 방정식 : $x = -2$

해설

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼭짓점의 좌표는 (p, q) , 축의 방정식은 $x = p$ 이다.
 $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 - 3$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -3)$, 축의 방정식은 $x = -2$ 이다.

6. 그림과 같이 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이고, y 절편이 2 인 포물선의 식을 $y = a(x-p)^2$ 이라 할 때, $a+p$ 의 값은?



[배점 4, 중중]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, 0)$ 이므로
 $y = a(x+1)^2$ 이고, y 절편이 2 이므로
 $2 = a(0+1)^2$, $a = 2$
 $y = 2(x+1)^2$
 $a = 2$, $p = -1$
 $\therefore a+p = 2-1 = 1$

7. 다음 보기 중에서 y 가 x 에 관한 이차함수인 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠. $y = 2x(x - 1)$
- ㉡. $y = \frac{x}{3} - 4$
- ㉢. $y = -3x^2 + 7$
- ㉣. $y = 2x^3 + x^2 - 5$
- ㉤. $y = \frac{5}{x^2}$
- ㉥. $y = \frac{x^2 + 2}{3}$

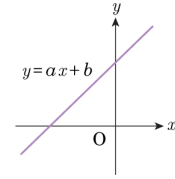
[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉢
- ② ㉠, ㉢, ㉥
- ③ ㉡, ㉣, ㉤
- ④ ㉢, ㉣, ㉥
- ⑤ ㉠, ㉢, ㉤, ㉥

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a \neq 0$ 이면 이차함수 이차함수인 것은 ② ㉠, ㉢, ㉥이다.

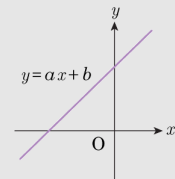
8. 다음 보기는 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 다음 중 이차함수 $y = bx^2 - ax - ab$ 의 그래프는?



[배점 4, 중중]

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

해설



의 그래프는 오른쪽 위로 향하므로 기울기도 양수이고 y 절편이 양수이다.

따라서 $a > 0$, $b > 0$ 이므로 $y = bx^2 - ax - ab$ 에서 $b > 0$ 이므로 아래로 볼록하고, $\frac{a}{b} > 0$ 이므로 축이 y 축의 오른쪽에 있고, $-ab < 0$ 이므로 y 절편이 음수인 그래프이다.

9. 이차함수 $y = 3x^2 + 6x - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 $y = 3x^2 - 12x + 2$ 의 그래프가 되었다. 이 때, pq 의 값은? [배점 4, 중중]

① 30 ② 15 ③ 10 ④ 5 ⑤ 45

해설

$$y = 3(x^2 + 2x + 1 - 1) - 2 = 3(x + 1)^2 - 5$$

꼭짓점 $(-1, -5)$

$$y = 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2 = 3(x - 2)^2 - 10$$

꼭짓점 $(2, -10)$

따라서 $p = 3$, $q = 15$ 이므로

$pq = 45$ 이다.

10. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 두 점 $(4, 8)$, $(b, \frac{9}{2})$ 를 지난다. 이 함수와 x 축 대칭인 이차함수가 (b, c) 를 지날 때, c 의 값은?(단, $b < 0$) [배점 5, 중상]

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

해설

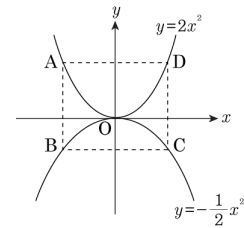
$y = ax^2$ 에 $(4, 8)$, $(b, \frac{9}{2})$ 을 대입하면 $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ 이다.

이 이차함수와 x 축 대칭인 이차함수는 $y = -\frac{1}{2}x^2$

이고 $(-3, c)$ 를 지나므로

$$\therefore c = -\frac{9}{2}$$

11. 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위에 있는 네 점 A, B, C, D 가 정사각형을 이룰 때, 점 D 의 x 좌표는?



[배점 5, 중상]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

점 D 의 좌표를 $(a, 2a^2)$ 이라고 하면

$A(-a, 2a^2)$, $B(-a, -\frac{1}{2}a^2)$, $C(a, -\frac{1}{2}a^2)$

이고, $\overline{DC} = \overline{BC}$ 이므로

$$2a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 2a, 5a^2 = 4a, a = \frac{4}{5} (\because a \neq 0)$$

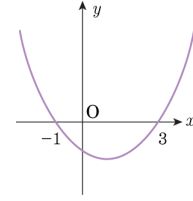
12. 다음 중 이차함수에 대한 설명이 옳지 않는 것은?
[배점 5, 중상]

- ① $y = x^2$ 에서 $x > 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.
- ② $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 는 $x = b$ 를 축으로 하고 점 $(0, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
- ③ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.
- ④ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.
- ⑤ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.

해설

- ① 아래로 볼록이므로 축의 오른쪽(축보다 큰 범위)에서 x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.
- ② $x = 0(y$ 축)을 축으로 하고, $(0, b)$ 를 꼭짓점으로 한다.
- ③ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.
- ④ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서의 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.
- ⑤ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때 a 가 커지면 $|a|$ 이 작아지므로 폭은 넓어진다.

13. 다음은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다.
<보기> 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?



보기

- ㉠ $b^2 - 4ac > 0$
- ㉡ $abc < 0$
- ㉢ $a - b + c < 0$
- ㉣ $9a + 3b + c > 0$
- ㉤ $a + b + c < 4a + 2b + c$

[배점 5, 중상]

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
- ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$
 축이 y 축의 오른쪽에 있으므로 $ab < 0$
 $\therefore b < 0$
 y 절편이 음수이므로 $c < 0$
 ㉠ x 축과의 교점이 2개이므로 $b^2 - 4ac > 0$
 ㉡ $abc > 0$
 ㉢ $x = -1$ 일 때, $y = a - b + c = 0$
 ㉣ $x = 3$ 일 때, $y = 9a + 3b + c = 0$
 ㉤ $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c$, $x = 2$ 일 때,
 $y = 4a + 2b + c$, $a + b + c < 4a + 2b + c$

14. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 일 때, abc 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.) [배점 5, 중상]

- ① 45 ② 20 ③ -5
 ④ -20 ⑤ -45

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이 $-1, 5$ 이므로

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x+1)(x-5)$$

$$= a(x^2 - 4x - 5)$$

$$= a(x-2)^2 - 9a$$

최댓값이 9 이므로 $-9a = 9$

$$\therefore a = -1$$

따라서 구하는 이차함수는 $y = -x^2 + 4x + 5$ 이고 $b = 4, c = 5$ 이다.

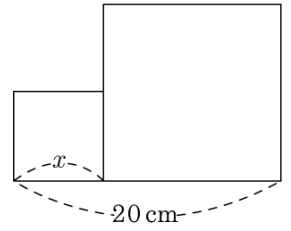
$$\therefore abc = -1 \times 4 \times 5 = -20$$

15. 다음 그림과 같이 길이가 20cm 인 선분을 두 부분으로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는

정사각형 두 개를 만들려고

한다. 두 정사각형의 넓이의

합이 최소가 되게 할 때, 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.



[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 10 cm

해설

작은 정사각형의 한 변의 길이를 x , 큰 정사각형의 한 변의 길이를 $20 - x$,

넓이를 y 라고 하면

$$y = x^2 + (20 - x)^2$$

$$= 2x^2 - 40x + 400$$

$$= 2(x - 10)^2 + 200$$

따라서 $x = 10$ 일 때, 최솟값 200 을 갖는다.

16. 이차함수 $y = (x+4)^2$, $y = (x-1)^2$ 의 그래프의 교점에서 x 축으로 평행한 선분을 그었을 때, 두 그래프와 만나는 교점을 각각 A, B라 하자. 이때 선분 AB의 길이를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 10

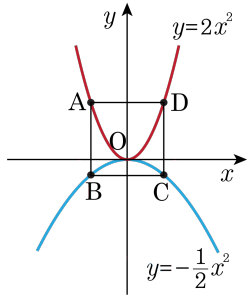
해설

두 이차함수의 그래프의 교점에서 x 축으로 평행한 선분을 그었을 때, 두 그래프와 만나는 교점 사이의 거리는 두 그래프의 꼭짓점 사이의 거리의 2 배와 같다.

$(-4, 0)$ 과 $(1, 0)$ 사이의 거리 = 5

따라서 선분 AB의 길이는 $5 \times 2 = 10$ 이다.

17. 오른쪽 그림과 같이 두 이차함수 $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위에 있는 네 점 A, B, C, D가 정사각형을 이룰 때, 점 D의 x 좌표는?



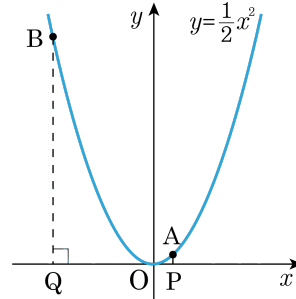
[배점 5, 상하]

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

점 D의 좌표를 $(a, 2a^2)$ 이라 하면
 $B(-a, -\frac{1}{2}a^2)$, $C(a, -\frac{1}{2}a^2)$
 $\overline{DC} = \overline{BC}$ 이므로
 $2a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 2a$, $5a^2 = 4a$
 $\therefore a = \frac{4}{5}$ ($\because a \neq 0$)

18. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A, B에 대하여 A의 좌표는 (4, 8)이고, B의 x 좌표는 음수이다. 점 A, B에서 각각 x 축에 수선 $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ 를 그으면 $\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 가 된다. 이 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하여라.



[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$\overline{AP} : \overline{BQ} = 4 : 25$ 에서 점 A의 y 좌표는
 $4 : 25 = 8 : y$

$\therefore y = 50$ 따라서, 점 B의 y 좌표는 50이다.

$y = \frac{1}{2}x^2$ 에 $y = 50$ 을 대입하면 $50 = \frac{1}{2}x^2$, $x^2 = 100$ $x < 0$ 이므로 $x = -10$ 이 되고 점 B의 x 좌표는 -10이다.

따라서, $\overline{QO} = 10$, $\overline{PO} = 4$ 이므로 $\overline{PQ} = 14$ 이다.

19. 두 이차함수 $y = 2x^2 + 4x + 3$, $y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $x = p$ 와 만나는 점을 각각 C, D, 직선 $x = q$ 와 만나는 점을 각각 E, F 라 할 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}$ 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

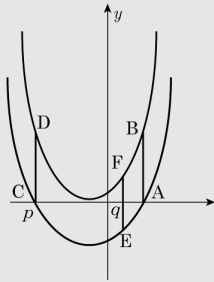
▶ 정답 : 2

해설

$y = 2x^2 + 4x + 3$ 은 $y = 2(x+1)^2 + 1$

$y = 2x^2 + 4x - 5$ 는 $y = 2(x+1)^2 - 7$ 이므로

$y = 2x^2 + 4x - 5$ 의 그래프는 $y = 2x^2 + 4x + 3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 것이므로



$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = 2$$

20. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [배점 5, 상하]

- ① 꼭짓점의 좌표는 $(4, -2)$ 이다.
- ② 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$ 의 그래프와 모양이 같다.
- ③ $x < 4$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
- ④ $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이다.
- ⑤ 제 3 사분면을 지나지 않는다.

해설

- ③ $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$, 아래로 볼록하기 때문에, 축의 왼쪽에서는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

21. $y = -x^2 + 6x + k$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나고, 두 교점 사이의 거리가 8일 때, k 의 값을 구하여라.
[배점 5, 상하]

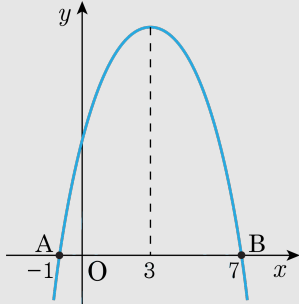
▶ 답 :

▶ 정답 : 7

해설

$$y = -x^2 + 6x + k = -(x^2 - 6x + 9 - 9) + k = -(x - 3)^2 + 9 + k$$

축의 방정식은 $x = 3$



그림에서 보면 $\overline{AB} = 8$ 이므로 A, B 는 축 $x = 3$ 에서 각각 4 만큼 떨어져 있어야 한다.

따라서 A, B 의 x 좌표는 각각 $-1, 7$ 이다.

즉 x 절편이 $-1, 7$ 이므로 식은 $y = -(x+1)(x-7)$ 전개하면 $y = -x^2 + 6x + 7 \therefore k = 7$

해설

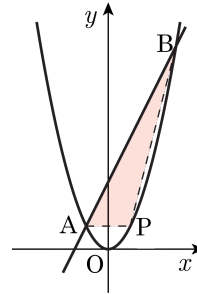
x 축과의 교점의 x 좌표를 각각 α, β 라 하면 α, β 는 $0 = -x^2 + 6x + k$ 의 두 근이다.

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = -k$

두 점 사이의 거리 $|\alpha - \beta| = 8, |\alpha - \beta|^2 = 8^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$64 = 36 + 4k, 4k = 28 \therefore k = 7$

22. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 의 교점을 A, B 라하고, 원점을 O 라 한다. 점 P 가 원점을 출발하여 포물선을 따라 B 까지 움직일 때, $\triangle APB$ 의 넓이와 $\triangle OAB$ 의 넓이가 같게 되는 점 P 의 좌표를 구하여라.



[배점 6, 상중]

- ① (1, 1) ② (1, 2) ③ (2, 1)
④ (2, 2) ⑤ (3, 2)

해설

$\triangle APB$ 와 $\triangle AOB$ 의 넓이가 같으면 직선 AB 와 직선 OP 는 평행하므로

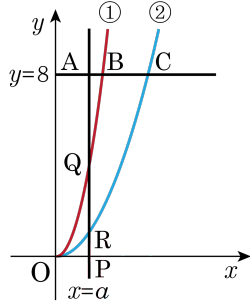
직선 OP 의 기울기는 2 이고 직선 OP 는 $y = 2x$ 이다. 점 P 의 좌표는 $y = x^2$ 과 $y = 2x$ 의 교점 이므로

$$x^2 = 2x, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0$$

$\therefore x = 2, y = 2$ 또는 $x = 0, y = 0$ (원점)

그런데 P 는 원점이 아니므로 $P(2, 2)$

23. 다음 그림은 이차함수 $y = 2x^2(x \geq 0) \cdots \textcircled{1}$, $y = \frac{1}{2}x^2(x \geq 0) \cdots \textcircled{2}$ 의 그래프이다. 직선 $y = 8$ 이 y 축 및 곡선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 와 점 A, B, C에서 만나고 $x = a$ 가 x 축 및 곡선 $\textcircled{2}$, $\textcircled{1}$ 과 점 P, R, Q에서 만날 때, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 와 $\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$ 의 합을 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(1) 8 = 2x^2, x^2 = 4 \quad x > 0 \text{ 이므로 } x = 2$$

$$8 = \frac{1}{2}x^2, x^2 = 16 \text{ 에서 } x > 0 \text{ 이므로 } x = 4$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{4-2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(2) \overline{PR} = \frac{1}{2}a^2, \overline{PQ} = 2a^2,$$

$$\overline{QR} = 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$\therefore \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \text{ 와 } \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = 1 + 3 = 4$$

24. 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 10$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이가 42가 되는 k 의 값을 모두 구하여라. (단, $0 < k < \sqrt{10}$) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $10\sqrt{10}$

해설

$$y = x^2 - 2kx + k^2 - 10 = (x - k)^2 - 10$$

$$\therefore A(k, -10), B(0, k^2 - 10)$$

$$x^2 - 2kx + k^2 - 10 = 0 \text{ 에서 } x = k \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore C(k - \sqrt{10}, 0), D(k + \sqrt{10}, 0)$$

원점을 O 라 하면 $k > 0$ 이므로

$$\therefore \square ABCD = \triangle OBC + \triangle ABO + \triangle AOD$$

$$= \frac{1}{2} \times (-k + \sqrt{10})(-k^2 + 10)$$

$$+ \frac{1}{2} \times (-k^2 + 10) \times k$$

$$+ \frac{1}{2} \times (k + \sqrt{10}) \times 10$$

이 식을 정리하면 $k^2 - 10\sqrt{10}k + 84\sqrt{10} - 200 = 0$
따라서 k 의 모든 값의 합은 $10\sqrt{10}$ 이다.

25. 좌표평면 위의 두 점 A(0, 2), B(-4, 3)와 직선 $y = 1$ 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

점 P의 좌표를 $(a, 1)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a^2 + 1) + \{(a + 4)^2 + 4\}$$

$$= 2a^2 + 8a + 21$$

$$= 2(a + 2)^2 + 13$$

따라서 $a = -2$ 일 때, 최솟값은 13이다.