

단원 종합 평가

1. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 = 0$ 의 한 근이 2 일 때, a 의 값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x = 2$ 를 방정식에 대입하면 $4 - 4a + a^2 = 0$,
 $(a - 2)^2 = 0 \therefore a = 2$

2. 다음 이차방정식 중 중근을 갖는 것은?

[배점 3, 하상]

- ① $x^2 = 6x - 9$ ② $2x^2 + x - 3 = 0$
 ③ $x^2 = 4$ ④ $x^2 + 5x = 0$
 ⑤ $x^2 + 5x + 6 = 0$

해설

중근을 갖는 이차방정식은 $(ax + b)^2 = 0$ 이다.

- ① $x^2 - 6x + 9 = 0 \leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$
 $\therefore x = 3$ (중근)

3. 다음은 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 6x + 3 = 0$ 을 푸는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

$x^2 + 6x =$ (가)
 $x^2 + 6x +$ (나) = (가) + (나)
 $(x +$ (다))² = (라)
 $x +$ (다) = $\pm\sqrt{}$ (라)
 $\therefore x =$ (마)

[배점 3, 하상]

- ① (가): -3 ② (나): 9
 ③ (다): 3 ④ (라): 6
 ⑤ (마): $\pm\sqrt{6}$

해설

$x^2 + 6x = -3$
 좌변을 완전제곱식이 되게 하는 9 를 양변에 더하면
 $x^2 + 6x + 9 = -3 + 9$
 $(x + 3)^2 = 6$
 $x + 3 = \pm\sqrt{6}$
 $\therefore x = -3 \pm \sqrt{6}$
 따라서 ⑤의 연결이 옳지 않다.

4. 길이가 24cm 인 철사로 넓이가 32cm^2 인 직사각형을 만들려고 한다. 가로 길이가 세로 길이보다 길 때, 이 직사각형의 가로의 길이는? [배점 3, 하상]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

가로의 길이를 $x\text{cm}$ 라 하면 세로의 길이는 $(12 - x)\text{cm}$

또, (가로의 길이) > (세로의 길이) 이므로 $x > 12 - x$, 즉 $x > 6$ 이다.

$$x(12 - x) = 32$$

$$(x - 4)(x - 8) = 0$$

$$x = 4 \text{ 또는 } x = 8$$

$\therefore x > 6$ 이므로 $x = 8$ 이다.

5. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 일 때, $\begin{vmatrix} x-3 & x+1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = x+17$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: $x = -\frac{3}{2}$

▶ 정답: $x = 7$

해설

$$\begin{vmatrix} x-3 & x+1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = x+17$$

$$2x(x-3) - 4(x+1) = x+17$$

$$2x^2 - 6x - 4x - 4 = x+17$$

$$2x^2 - 11x - 21 = 0$$

$$(x-7)(2x+3) = 0$$

따라서 $x = 7$ 또는 $x = -\frac{3}{2}$ 이다.

6. 다음 보기 중 x 에 대한 이차방정식인 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $x(x-1) = x^2$

㉡ $3x^2 - 2x + 5$

㉢ $x^2(2+x) = 3+x^2$

㉣ $4x^2 - 6 = 0$

㉤ $(x-1)(x+2) = 0$

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉣

▶ 정답: ㉤

해설

㉠ 정리하면 $-x = 0 : x$ 에 대한 일차방정식이다.

㉡ x 에 대한 이차식이다.

㉢ 정리하면 $x^3 + x^2 - 2 = 0 : x$ 에 대한 삼차방정식이다.

㉣ x 에 대한 이차방정식이다.

㉤ 정리하면 $x^2 + x - 2 = 0 : x$ 에 대한 이차방정식이다.

7. 이차방정식 $x^2 + 5x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 $x^2 + mx + n = 0$ 이라 할 때, mn 을 구하여라.

[배점 3, 중하]

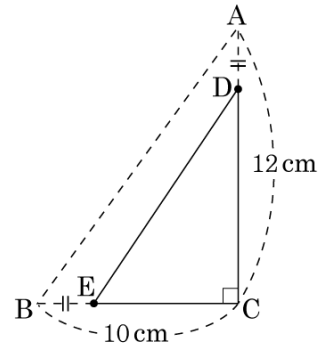
▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

$x^2 + 5x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = -5$
 $\alpha\beta = -1$,
 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은
 $x^2 - (\alpha + \beta - 2)x + (\alpha\beta - \alpha - \beta + 1) = 0$,
 $x^2 - (-5 - 2)x + (-1 + 5 + 1) = 0$,
 $x^2 + 7x + 5 = 0$,
 $m = 7, n = 5$,
 $\therefore mn = 35$

8. 다음 그림과 같은 직각삼각형 ABC 에서 높이와 밑변을 서로 동일한 길이만큼 짧게 만 들었을 때, 직각삼각형 DEC 의 넓이가 12cm^2 가 되었다. 줄어든 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 cm

해설

줄어든 길이를 $x\text{ cm}$ 라고 할 때
 밑변의 길이는 $(10 - x)\text{ cm}$, 높이의 길이는 $(12 - x)\text{ cm}$ 이다.
 $\frac{1}{2}(10 - x)(12 - x) = 12$ 이므로
 $x^2 - 22x + 96 = 0$
 $(x - 6)(x - 16) = 0$
 따라서 $x = 6$ ($\because 0 < x < 10$) 이다.

9. 연속하는 세 자연수가 있다. 세 자연수의 제곱의 합이 149 일 때, 가장 작은 수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

연속하는 세 자연수를 $x - 1, x, x + 1$ 이라 하면
 $(x - 1)^2 + (x)^2 + (x + 1)^2 = 149$ 이므로
 $3x^2 - 147 = 0$
 $x^2 - 49 = 0$
 $(x + 7)(x - 7) = 0$
 따라서 $x = 7$ (x 는 자연수) 이다.
 가장 작은 수는 $7 - 1 = 6$ 이다.

10. x 에 관한 이차방정식 $(a-1)x^2 - (a^2+1)x + 2(a+1) = 0$ 의 한 근이 3 일 때, 두 근의 곱은? (a 는 정수)
[배점 4, 중중]

- ① 2 ② 3 ③ 2, 3
④ -6 ⑤ 6

해설

$x = 3$ 을 대입하면 $3a^2 - 11a + 10 = 0$
인수분해하면 $(3a - 5)(a - 2) = 0$
 $a = 2$ ($\because a$ 는 정수)
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 을 인수분해하면 $(x-3)(x-2) = 0$
 $x = 3$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 곱은 6

11. 다음 보기에서 이차방정식의 개수는?

보기

- ㉠ $2x^2 - 5 = x^2$
㉡ $x^2 = -x + 2$
㉢ $x^2 = 0$
㉣ $x^2 = (x-1)^2 + x^2$
㉤ $x(x^2 + 1) = x^3 + x^2 - 1$
㉥ $2x^2 - 5x - 1 = 2(x^2 - 1)$

[배점 4, 중중]

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개
④ 6개 ⑤ 7개

해설

이차방정식은 (x 에 관한 이차식) $= 0$ 꼴의 등식이다.
 $\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥ 5개

12. 다음 이차방정식 중에서 해가 중근이 아닌 것은?
[배점 4, 중중]

- ① $x^2 = 0$
 ② $x(x - 6) + 9 = 0$
 ③ $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 8 = 0$
 ④ $x^2 - 1 = 0$
 ⑤ $x^2 + 6x + 11 = -(4x + 14)$

해설

(완전제곱식) = 0의 꼴이어야 중근을 갖는다.

- ④ $x^2 = 1$ 이므로 $x = \pm 1$
 따라서 서로 다른 두 개의 근을 갖는다.

13. 이차방정식 $x^2 + 8x + 24 - m = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 m 의 값은?
[배점 4, 중중]

- ① -8 ② -6 ③ 0 ④ 6 ⑤ 8

해설

중근을 가지려면 $x^2 + 8x + 24 - m = 0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로 $24 - m = 16$
 $\therefore m = 8$

14. 1부터 n 까지의 자연수만의 합은 다음과 같다. 이때, 합이 78이 되려면 1부터 n 까지의 수를 더해야 한다고 할 때, n 을 구하여라.

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= 78 \text{ 이므로} \\ n^2 + n - 156 &= 0 \\ (n-12)(n+13) &= 0 \\ n > 0 \text{ 이므로 } n &= 12 \end{aligned}$$

15. 어떤 원에서 반지름을 2cm 늘였더니 그 넓이가 처음 원의 2배가 되었다. 처음 원의 반지름은 얼마인지 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : $2 + 2\sqrt{2}$ cm

해설

$$\begin{aligned} \text{처음 원의 반지름의 길이를 } x \text{ cm 라 하면} \\ 2\pi x^2 &= \pi(x+2)^2 \\ 2x^2 &= x^2 + 4x + 4 \\ x^2 - 4x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \pm 2\sqrt{2} \\ x > 0 \text{ 이므로 } x &= 2 + 2\sqrt{2} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

16. 성훈이가 물로켓을 만들어 위로 똑바로 쏘아 올린 물로켓의 t 초 후의 높이가 $(40t - 8t^2)$ m 라고 할 때, 물로켓이 땅에 떨어지는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인지 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5초후

해설

땅에 떨어지는 것은 높이가 0 일 때이다.

식을 세우면 $40t - 8t^2 = 0$

식을 정리하면 $t^2 - 5t = 0$

$t(t - 5) = 0$

$t > 0$ 이므로 $t = 5$

17. [배점 5, 중상]

해설

18. $x^2 + ax + b = 0$ 에서 계수 a, b 를 정하기 위하여 주사위를 던져서 나오는 첫 번째의 수를 a , 두 번째의 수를 b 라 한다. 이 때, 이 이차방정식이 중근을 가지는 확률은? [배점 5, 중상]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

해설

중근을 가지려면 $x^2 + ax + b = 0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로 $\left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = b$ 이다.

$a^2 = 4b$ 를 만족하는 (a, b) 를 구하면 $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ 의 두 가지이고 모든 경우의 수는 36 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 이다.

19. 집합 $A = \{x | x^2 - (a+1)x + a = 0\}$, $B = \{x | x^2 - (b-2)x - 2b = 0\}$, $C = \{x | x^2 - (3a+5b)x + 15ab = 0\}$ 가 있다. 집합 $P = \{x | x \in A, x \in B, x \in C, x < 0\}$, $n(P) = 1$ 일 때, $a - 5b$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$A : (x-1)(x-a) = 0 \Rightarrow x = 1, a$

$B : (x+2)(x-b) = 0 \Rightarrow x = b, -2$

$C : (x-3a)(x-5b) = 0 \Rightarrow x = 3a, 5b$

$P = A \cap B \cap C$ 이고, $n(P) = 1$ 이므로 공통근이 하나이며 음수이다.

따라서 공통근은 a 또는 -2 이다.

(1) 공통근이 -2 일 때

A 에서 $a = -2$, C 는 $x = -6, 5b$ 이므로 $5b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}$

(2) 공통근이 a 일 때 ($a \neq -2$)

B 에서 $a = b$ 가 되고 C 에서 $x = 3a, 5a$ 가 되어 공통근이 생기지 않는다.

따라서 $a = -2, -5b = 2$ 이므로 $a - 5b$ 의 값은 0 이다.

20. 이차방정식 $x^2 + (-m + 3)x + 24 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?

- ㉠ 주어진 식을 만족하는 해의 집합은 $\{4, 6\}$ 또는 $\{-6, -8\}$ 이다.
 ㉡ 작은 근을 α 라 하고 $\alpha < 0$ 이면 $m > 0$ 이다.
 ㉢ 작은 근을 α 라 하고 $\alpha > 0$ 이면 $m = 13$ 이다.
 ㉤ 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 6이다.

[배점 5, 중상]

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개
 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라 하면
 $\alpha(\alpha + 2) = 24$ 에서 $\alpha = 4$ 또는 -6
 ㉠ $\{4, 6\}$ 또는 $\{-6, -4\}$
 ㉡ $\alpha < 0$ 이면 두 근은 $-6, -4$ 이고 $m - 3 = -6 - 4 = -10$
 $m = -7$ 이므로 $m < 0$ 이다.
 ㉢ $\alpha > 0$ 이면 두 근은 $4, 6$ 이고
 $m - 3 = 4 + 6 = 10$
 $\therefore m = 13$
 ㉤ $m = -7, 13$ 이므로 모든 m 의 값의 합은 6이다

21. x^2 의 계수가 1인 어떤 이차방정식을 x 의 계수를 잘못 보고 풀었더니 해가 1, 5 이었고, 상수항을 잘못 보고 풀었더니 해가 $-2, -4$ 이었다. 이 방정식의 옳은 근은? [배점 5, 중상]

- ① 2, 5 ② 2, -5 ③ 1, 5
 ④ 1, 2 ⑤ $-1, -5$

해설

원래 이차방정식을 $x^2 + ax + b = 0$ 이라 하면
 $b = 1 \times 5 = 5, -a = -2 + (-4) = -6, a = 6$
 따라서 $x^2 + 6x + 5 = 0, (x + 1)(x + 5) = 0,$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = -5$

해설

$(x - 1)(x - 5) = 0, x^2 - 6x + 5 = 0$
 일차항의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 5
 $(x + 2)(x + 4) = 0, x^2 + 6x + 8 = 0$
 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 6,
 따라서 $x^2 + 6x + 5 = 0, (x + 1)(x + 5) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = -5$

22. 다음 중 이차방정식 $(x - a)^2 = b$ 에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [배점 5, 상하]

- ① $b \geq 0$ 이면 근을 갖는다.
- ② $b = 0$ 이면 중근을 갖는다.
- ③ a 의 값에 관계없이 $b > 0$ 이면 서로 다른 두 근을 갖는다.
- ④ $b < 0$ 이면 근을 갖지 않는다.
- ⑤ $b > 0$ 이면 양수와 음수인 두 근을 갖는다.

해설

⑤ 둘 다 양수일 수도, 둘 다 음수일 수도 있다.

23. 다음은 이차방정식에 관한 설명이다. 안에 알맞은 말을 써라.
방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (이차식) = 0 의 모양으로 되는 식을 이라고 한다. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 이차방정식

해설

(이차식) = 0 의 형태를 이차방정식이라 한다.

24. 다음 중 [] 안의 수가 주어진 방정식의 해인 것을 모두 고르면? [배점 5, 상하]

- ① $x^2 - 4x = 3x$ [0]
- ② $x^2 + 2x - 8 = 0$ [-2]
- ③ $(x + 2)^2 = 9x$ [2]
- ④ $2x - 7x + 6 = 0$ [2]
- ⑤ $2x^2 - 15x - 8 = 0$ [8]

해설

[] 안의 수를 식에 대입한다.

25. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근 p, q 가 p 는 약수가 2 개인 소수, q 는 홀수이고, $p^2 + q = 25$ 를 만족할 때, $\frac{b^2c + bc^2}{a^3}$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: -18354

해설

$p^2 = 25 - q$ 이고 q 가 홀수이므로 p^2 은 짝수이다.
즉 p 도 짝수이고 짝수인 소수는 2 뿐이므로 $p = 2$
 $\therefore q = 21$

따라서 이차방정식은

$$a(x - 2)(x - 21) = ax^2 - 23ax + 42a = 0$$

$$\therefore b = -23a, c = 42a$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{b^2c + bc^2}{a^3} &= \frac{bc(b + c)}{a^3} \\ &= \frac{-23a \times 42a \times (-23a + 42a)}{a^3} \\ &= (-23) \times 42 \times 19 \\ &= -18354 \end{aligned}$$