

단원 종합 평가

1. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $x = 3, x = -1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$$\begin{aligned} (x-3)(x+1) &= 0 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ a &= -2, b = -3 \\ \therefore a + b &= -5 \end{aligned}$$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 -3, 1 일 때, $|a - b|$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 5

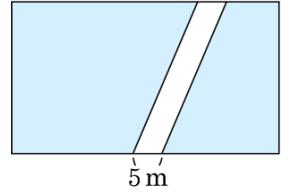
해설

근의 계수의 관계로 부터

$$\begin{aligned} -a &= -3 + 1 = -2 \quad \therefore a = 2 \\ b &= (-3) \times 1 = -3 \quad \therefore b = -3 \end{aligned}$$

따라서 $|a - b| = |5| = 5$ 이다.

3. 가로 길이가 세로 길이보다 3 배 긴 직사각형 모양의 화단에 다음 그림과 같은 길을 내었더니, 화단의 넓이가 250m^2 가 되었다. 처음 화단의 가로의 길이를 구하여라.



[배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 30m

해설

화단의 세로의 길이를 $x\text{m}$ 라고 하면, 가로의 길이는 $3x\text{m}$ 이므로

$$x \times 3x - 5 \times x = 250$$

$$(x-10)(3x+25) = 0$$

$$x = 10 \left(\text{단, } x > \frac{5}{3} \right)$$

따라서 가로의 길이는 $3x$ 이므로 30m

4. 선물 가게에 원가가 1500원인 물건이 있다. $a\%$ 의 이익을 붙여서 정가를 정하였다가 할인 기간에 정가의 $10a\%$ 를 받고 팔았더니 204원의 손해를 보았다. 이 때, a 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

원가: 1500원

정가: $1500 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right)$ 원

$$1500 \times \left(1 + \frac{a}{100}\right) \times \frac{10a}{100} + 204 = 1500$$

$$150a + \frac{3}{2}a^2 + 204 = 1500$$

$$a^2 + 100a - 864 = 0$$

$$(a+108)(a-8) = 0$$

$a > 0$ 이므로 $a = 8$

5. 차가 3 인 두 양의 정수의 곱이 108 일 때, 이 두 양의 정수의 합을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 21

해설

두 양의 정수를 $x, x+3$ 이라 하면
 $x(x+3) = 108, x^2 + 3x - 108 = 0$
 $(x+12)(x-9) = 0$
 $x = -12$ 또는 $x = 9$
 x 는 양수이므로
 $x = 9, x+3 = 12$
 $\therefore 9 + 12 = 21$

6. 다음은 이차방정식 $2x^2 + x - 3 = 0$ 의 해를 구하는 과정이다. $a + b + c + d$ 의 값은?

보기

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

$$x = -\frac{b}{a} \text{ 또는 } x = -\frac{d}{c}$$

[배점 4, 중중]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x^2 + x - 3 = 0$ 를 인수분해하면 $(2x+3)(x-1) = 0$
 따라서 $a = 2, b = 3, c = 1, d = -1$ 이거나 $a = 1, b = -1, c = 2, d = 3$ 이 된다.
 어느 경우이든 $a + b + c + d = 5$ 이다.

7. 이차방정식 $5x^2 + ax - a - 1 = 0$ 의 두 근이 $x = -3, x = b$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{4}{55}$

해설

$x = -3$ 을 주어진 식에 대입하면
 $5 \times (-3)^2 - 3a - a - 1 = 0, a = 11$
 $5x^2 + 11x - 11 - 1 = 0$
 $5x^2 + 11x - 12 = 0$
 $(5x - 4)(x + 3) = 0$
 $x = \frac{4}{5}, x = -3$
 $\therefore b = \frac{4}{5}$
 $\frac{b}{a} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{11} = \frac{4}{55}$

8. 이차방정식 $ax^2 + 2x + a = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면? [배점 4, 중중]

- ① $a = -1$ 이면 중근을 갖는다.
- ② $a = \frac{1}{2}$ 이면 서로 다른 두 근을 갖는다
- ③ 이차방정식의 근은 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$ 이다.
- ④ $a = 3$ 이면 근을 갖지 않는다
- ⑤ $a \geq -1$ 이면 서로 다른 두 개의 양의 정수를 근으로 갖는다.

해설

판별식 $D = 2^2 - 4a^2 = 4(1-a^2) = 4(1+a)(1-a)$

- ① $a = -1$ 이면 $D = 0$ 이 되어 중근을 갖는다.
- ② $a = \frac{1}{2}$ 이면 $D > 0$ 이 되어 서로 다른 두 근을 갖는다.
- ③ 근의 공식으로 풀면 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$
- ④ $a = 3$ 이면 $D < 0$ 이 되어 근을 갖지 않는다.
- ⑤ $a \geq -1$ 이면 $D \geq 0$ 이므로 중근 또는 서로 다른 두 근을 갖는다.

9. 이차방정식 $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 5 = 0$ 이 해를 1개 가질 때 m 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 정답: 2

해설

$$D = 4(m+1)^2 - 4(m^2 + 5) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - m^2 - 5 = 0$$

$$2m - 4 = 0$$

$$\therefore m = 2$$

10. $(x-y)(x-y-4) + 4 = 0$ 일 때, $x-y$ 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(x-y)(x-y-4) + 4 = 0$$

$x-y$ 를 A 로 치환하면,

$$A(A-4) + 4 = 0$$

$$A^2 - 4A + 4 = 0, (A-2)^2 = 0$$

$$(x-y-2)^2 = 0$$

$$x-y-2 = 0$$

$$\therefore x-y = 2$$

11. 이차방정식 $(x-1)(x-b) = -1$ 이 0이 아닌 중근 a 를 가진다. 이때, b 의 값은? (단, a, b 는 정수)

[배점 5, 중상]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b) = -1$ 이 중근 a 를 가지므로

x 에 a 를 대입하면

$$(a-1)(a-b) = -1$$

i) $a-1 = -1, a-b = 1$ 인 경우

$$a = 0, b = -1, a \neq 0 \text{ 이므로 부적합}$$

ii) $a-1 = 1, a-b = -1$ 인 경우

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore b = 3$$

12. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - 2x + m = 0$ 을 $\frac{1}{3}(x+n)^2 = -6$ 의 꼴로 나타낼 때, mn 의 값은? [배점 5, 중상]

- ① 21 ② -21 ③ 27
 ④ -27 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x^2 - 6x) &= -m, \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 3 = -m \\ \frac{1}{3}(x - 3)^2 &= -m + 3 \\ \therefore m &= 9, n = -3 \\ \therefore mn &= -27 \end{aligned}$$

13. x 에 관한 이차방정식 $(x-p)^2 = k$ 가 해를 가질 조건은? [배점 5, 중상]

- ① $p \geq 0$ ② $p < 0$ ③ $k \geq 0$
 ④ $k > 0$ ⑤ $k < 0$

해설

$$\begin{aligned} (x-p)^2 &= k, x-p = \pm\sqrt{k} \\ \therefore x &= p \pm \sqrt{k} \end{aligned}$$

이차방정식은 실수 범위이므로, 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$$\therefore k \geq 0$$

14. 이차방정식 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 한 근이 $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은? [배점 5, 중상]

- ① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} \text{한 근이 } \frac{1}{\sqrt{5}-2} &= \sqrt{5} + 2 \text{ 이므로 다른 한 근은} \\ &= -\sqrt{5} + 2 \\ \text{근과 계수와의 관계에서} \\ -\frac{b}{a} &= (\sqrt{5} + 2) + (-\sqrt{5} + 2) = 4, \frac{5}{a} = (\sqrt{5} + 2)(-\sqrt{5} + 2) = -1 \\ \therefore a &= -5 \\ \therefore b &= -4a = (-4) \times (-5) = 20 \\ \therefore a + b &= -5 + 20 = 15 \end{aligned}$$

15. 이차방정식 $6x^2 - 5x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{13}{36}$ 이다. 이 때, 상수 a 의 값은? [배점 5, 중상]

- ① 1 ② 5 ③ 13
 ④ -1 ⑤ -13

해설

$$\begin{aligned} \text{근과 계수의 관계에서} \\ \alpha + \beta &= \frac{5}{6}, \alpha\beta = \frac{a}{6} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{25}{36} - \frac{a}{3} = \frac{13}{36} \\ \therefore a &= 1 \end{aligned}$$

16. 배가 강을 따라 내려올 때는 거꾸로 거슬러 올라갈 때보다 시속 1km 더 빠르다. 강의 상류에서 하류까지 20km 를 왕복하는데 9시간 걸린다면 20km 를 내려오는 데 걸리는 시간은 몇 시간인지 구하여라.

[배점 5, 중상]

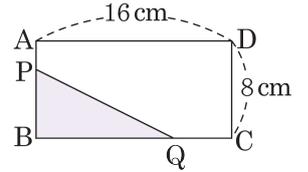
▶ 답:

▷ 정답: 4시간

해설

올라갈 때 속력을 x km/h 라 하면
 내려올 때 속력은 $(x + 1)$ km/h
 $\frac{20}{x} + \frac{20}{x + 1} = 9$ 의 양변에 $x(x + 1)$ 을 곱하면
 $20(x + 1) + 20x = 9x(x + 1)$
 $40x + 20 = 9x^2 + 9x$
 $9x^2 - 31x - 20 = 0$
 $(x - 4)(9x + 5) = 0$
 $x > 0$ 이므로 $x = 4$ (km/h)
 따라서 내려올 때 속력 : $x + 1 = 5$ km/h
 $\therefore \frac{20}{5} = 4$ (시간)

17. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 16cm , 8cm 인 직사각형 ABCD 에서 점 P 는 \overline{AB} 위를 점 A 에서 B 까지 매초 1cm



의 속력으로 움직이고, 점 Q 는 \overline{BC} 위를 점 B 에서 점 C 까지 매초 2cm 의 속력으로 움직인다. 두 점 P , Q 가 각각 점 A , B 를 동시에 출발할 때 몇 초후 에 $\triangle PBQ$ 의 넓이가 15cm^2 가 되는지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 3초후

▷ 정답: 5초후

해설

x 초 후, \overline{BP} , \overline{BQ} 의 길이를 구하면
 $\overline{BP} = 8 - x$, $\overline{BQ} = 2x$,
 $\triangle PBQ = 2x(8 - x) \times \frac{1}{2} = 15$,
 $x^2 - 8x + 15 = 0$,
 $(x - 3)(x - 5) = 0$,
 따라서 $x = 3$ 또는 $x = 5$ 이다.

18. 이차방정식 $x^2 + 10x - 24 = 0$ 을 풀어라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -12

▷ 정답: 2

해설

$x^2 + 10x - 24 = 0$
 $(x + 12)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -12$ 또는 $x = 2$

19. 다음 중 [] 안의 수가 주어진 방정식의 해인 것을 모두 고르면? [배점 5, 상하]

- ① $x^2 - 4x = 3x$ [0]
- ② $x^2 + 2x - 8 = 0$ [-2]
- ③ $(x + 2)^2 = 9x$ [2]
- ④ $2x - 7x + 6 = 0$ [2]
- ⑤ $2x^2 - 15x - 8 = 0$ [8]

해설

[] 안의 수를 식에 대입한다.

20. 다음은 이차방정식에 관한 설명이다. [] 안에 알맞은 말을 써라.

방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이 (이차식) = 0 의 모양으로 되는 식을 [] 이라고 한다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 이차방정식

해설

(이차식) = 0 의 형태를 이차방정식이라 한다.

21. 다음 중 이차방정식 $(x - a)^2 = b$ 에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [배점 5, 상하]

- ① $b \geq 0$ 이면 근을 갖는다.
- ② $b = 0$ 이면 중근을 갖는다.
- ③ a 의 값에 관계없이 $b > 0$ 이면 서로 다른 두 근을 갖는다.
- ④ $b < 0$ 이면 근을 갖지 않는다.
- ⑤ $b > 0$ 이면 양수와 음수인 두 근을 갖는다.

해설

⑤ 둘 다 양수일 수도, 둘 다 음수일 수도 있다.

22. 이차방정식 $ax^2 + b = 0$ 의 두 근 p, q 에 대하여 $p - k, q - k$ 를 두 근으로 가지는 이차방정식은 $x^2 - 2x + \frac{5}{2}$ 가 될 때, k 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: -1

해설

$ax^2 + b = 0$ 의 두 근이 p, q 이므로 $p + q = 0$
 $x^2 - 2x + \frac{5}{2}$ 의 두 근이 $p - k, q - k$ 이므로
 $p + q - 2k = 2$
 $\therefore k = -1$

23. 사과 120 개를 몇 명의 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 사람에게 돌아가는 사과의 수는 학생 수보다 2 만큼 작다. 학생 수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 12명

해설

학생 수를 x , 사과 수를 $x - 2$ 라고 하면

$$x(x - 2) = 120$$

$$x^2 - 2x - 120 = 0$$

$$(x - 12)(x + 10) = 0$$

$$x = 12 \text{ 또는 } x = -10$$

$$\therefore x = 12$$

24. 실수 a, b 에 대하여 $a \cdot b$ 를

$$a \cdot b = \begin{cases} 2a(a \geq b(\text{일 때})) \\ -b(a < b(\text{일 때})) \end{cases} \text{ 로 정의할 때, 연립방정식}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 3x + y^2 \\ x \cdot y = x - y - 2 \end{cases} \text{ 를 만족하는 정수 } x, y \text{ 의 순서쌍 } (x, y) \text{ 에 대해 } x \times y \text{ 의 값은? [배점 6, 상중]}$$

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

1) $x \geq y$ 일 때,

$$\begin{cases} 2x = 3x + y^2 \dots \text{㉠} \\ 2x = x - y - 2 \dots \text{㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠ 에서 } x = -y^2$$

이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$y^2 - y - 2 = 0, (y - 2)(y + 1) = 0$$

$$\therefore y = 2 \text{ 또는 } y = -1$$

$$\therefore x = -4, y = 2 \text{ 또는 } x = -1, y = -1 \quad x \geq y$$

이므로 $(x, y) = (-1, -1)$

2) $x < y$ 일 때,

$$\begin{cases} -y = 3x + y^2 \dots \text{㉢} \\ -y = x - y - 2 \dots \text{㉣} \end{cases}$$

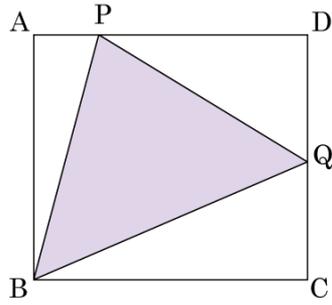
㉢ 에서 $x = 2$ 이것을 ㉣에 대입하여 정리하면

$$y^2 + y + 6 = 0$$

이 방정식의 정수해는 없다.

$\therefore (x, y) = (-1, -1)$ 이고 $x \times y$ 의 값은 1이다.

25. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 에서 점 P 는 선분 AD 위에 있고, 점 Q 는 선분 CD 위에 있다. 삼각형 ABP, PDQ, BCQ 의 넓이가 각각 2.5, 4.5, 4 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} \overline{AD} = x, \overline{AB} = y \text{ 라 하면} \\ \triangle ABP = \frac{1}{2}y \times \overline{AP} = 2.5 \quad \therefore \overline{AP} = \frac{5}{y} \\ \triangle BCQ = \frac{1}{2}x \times \overline{QC} = 4 \quad \therefore \overline{QC} = \frac{8}{x} \\ \text{따라서 } \triangle PQD = \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{y}\right) \left(y - \frac{8}{x}\right) = 4.5 \\ \left(\frac{xy - 5}{y}\right) \left(\frac{xy - 8}{x}\right) = 9 \\ (xy - 5)(xy - 8) = 9xy \\ (xy)^2 - 22xy + 40 = 0 \\ (xy - 2)(xy - 20) = 0 \\ \therefore xy = 2 \text{ 또는 } xy = 20 \\ \text{그런데 } xy > 11 \text{ 이므로 } xy = 20 \\ \therefore \triangle PBQ = 20 - 11 = 9 \end{aligned}$$