

단원 종합 평가

1. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 40, n(A) = 14, n(B) = 19, n(A \cup B) = 21$ 일 때, $n(B^c) - n(A - B)$ 의 값은? [배점 3, 하상]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 15 ⑤ 19

해설

$n(B^c) = n(U) - n(B) = 40 - 19 = 21$ 이다. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, $21 = 14 + 19 - n(A \cap B)$ 이므로 $n(A \cap B) = 12$ 이다. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 14 - 12 = 2$ 이므로 $n(B^c) - n(A - B) = 21 - 2 = 19$ 이다.

2. 다음 중 2 와 서로소인 수는 모두 몇 개인가?

3, 4, 5, 6, 7, 9, 10

[배점 3, 하상]

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

2 와 서로소인 수는 3, 5, 7, 9로 총 4 개이다.

3. 다음 수 중에서 가장 큰 수는? [배점 3, 하상]

① $1001_{(2)}$ ② 10
③ $10000_{(2)}$ ④ $2^3 + 2^2 + 2 + 1$
⑤ 17

해설

① $1001_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 1 = 9$
② 10
③ $10000_{(2)} = 1 \times 2^4 = 16$
④ $8 + 4 + 2 + 1 = 15$
⑤ 17

4. 180 의 약수의 개수와 $2 \times 3^2 \times 5^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 a 의 값을 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, 180 의 약수의 개수:
 $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$ (개)
 $2 \times 3^2 \times 5^a$ 의 약수의 개수:
 $(1+1) \times (2+1) \times (a+1) = 18$ (개)
 $\therefore a = 2$

5. 다음 중 약수의 개수가 서로 다른 두 수로 짝지어진 것은? [배점 3, 중하]

- ① $8, 3^3$ ② $21, 5 \times 7$
 ③ $45, 2^2 \times 3$ ④ $100, 2^{10}$
 ⑤ $72, 3 \times 5 \times 7^2$

해설

- ① $8 = 2^3$ 이므로 약수의 개수는 $3 + 1 = 4$ (개)이고, 3^3 의 약수의 개수도 $3 + 1 = 4$ (개)이다.
 ② $21 = 3 \times 7$ 이므로 약수의 개수는 $(1 + 1) \times (1 + 1) = 4$ (개)이고, 5×7 의 약수의 개수는 $(1 + 1) \times (1 + 1) = 4$ (개)이다.
 ③ $45 = 3^2 \times 5$ 의 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ (개)이고, $2^2 \times 3$ 의 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ (개)이다.
 ④ $100 = 2^2 \times 5^2$ 의 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (2 + 1) = 9$ (개)이고, 2^{10} 의 약수의 개수는 $10 + 1 = 11$ (개)이다.
 ⑤ $72 = 2^3 \times 3^2$ 의 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이고, $3 \times 5 \times 7^2$ 의 약수의 $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.

6. 두 수 $2^2 \times 3 \times 5^2$, $2 \times 3^2 \times 7$ 의 공약수를 모두 구하여라. [배점 3, 중하]

- ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▶ 답 :
 ▷ 정답 : 1
 ▷ 정답 : 2
 ▷ 정답 : 3
 ▷ 정답 : 6

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수와 같다.
 최대공약수가 $2 \times 3 = 6$ 이므로
 6 의 약수는 1, 2, 3, 6

7. 두 자연수의 공약수가 36의 약수와 같을 때, 두 수의 공약수의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개
 ④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

공약수는 최대공약수의 약수이므로 공약수의 개수는 최대공약수의 약수의 개수와 같다.
 최대공약수 36을 소인수분해하면 $36 = 2^2 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(2 + 1) \times (2 + 1) = 9$ (개)이다.
 따라서 두 자연수의 공약수의 개수는 9 개이다.

8. 어떤 수와 126의 최소공배수가 378이라고 한다. 어떤 수가 될 수 있는 두 자리의 수를 모두 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 54

해설

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

$$378 = 2 \times 3^3 \times 7$$

$$\text{어떤 수} : 3^3, 2 \times 3^3$$

9. 사과 24개와 배 36개를 될 수 있는대로 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 몇 명에게 나누어 줄 수 있는가? [배점 3, 중하]

① 10명

② 11명

③ 12명

④ 13명

⑤ 14명

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 36 \ 24} \\ 2 \overline{) 18 \ 12} \\ 3 \overline{) 9 \ 6} \\ 3 \ 2 \end{array} \quad 2 \times 2 \times 3 = 12$$

10. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 2를 반드시 포함하고 n 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 16개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$2^{(1, 2, n \text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-3} = 16 = 2^4 \quad \therefore$$

$$n = 7$$

11. 두 집합 $A = \{2, 5, 9, a\}$, $B = \{3, 7, b+2, b-2\}$ 에 대하여 $A - B = \{2, 8\}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 A 에서 $a = 8$ 이고,

$A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로

(i) $b + 2 = 5$ 일 때, $b = 3$ 이므로

$B = \{1, 3, 5, 7\} \Rightarrow A \cap B = \{5\}$ (×)

(ii) $b - 2 = 5$ 일 때, $b = 7$ 이므로

$B = \{3, 5, 7, 9\} \Rightarrow A \cap B = \{5, 9\}$ (○)

$$\therefore a - b = 8 - 7 = 1$$

12. 집합 $A = \{1, 2, a, 5\}, B = \{2, b+1, b+2, 6\}$ 이고 $A \cap B = \{2, 4\}$ 라고 할 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는?
[배점 4, 중중]

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$
③ $\{1, 3, 5\}$ ④ $\{1, 3, 6\}$
⑤ $\{1, 3, 5, 6\}$

해설

$A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 $a = 4, A = \{1, 2, 4, 5\}$ 이다.

(1) $b+1 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4, 5\}$ 가 되어 조건에 맞지 않는다.

(2) $b+2 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4\}$ 가 되어 조건에 맞는다.

따라서 $A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{2, 3, 4, 6\}$ 이 되어 $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$ 이다.

13. 두 집합 $A = \{1, 2, a, 6\}, B = \{2, b, 3, 1\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, $a + b$ 의 값은? [배점 4, 중중]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$A = B$ 이므로 $a = 3, b = 6$

$\therefore a + b = 9$

14. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{보다 작은 홀수}\}$ 의 부분집합 중 원소 3, 7 를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 $2^{(3, 7 \text{를 뺀 원소의 개수})} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$

15. $11111_{(2)}$ 보다 작은 7 의 배수를 모두 이진법의 수로 나타낸 것이다. 다음 중 아닌 것은?

[배점 4, 중중]

- ① $111_{(2)}$ ② $1111_{(2)}$ ③ $1110_{(2)}$
④ $10101_{(2)}$ ⑤ $11100_{(2)}$

해설

② $1111_{(2)} = 15$ 이므로 7 의 배수가 아니다.

16. 다음 수를 약수의 개수가 적은 것부터 순서대로 나열한 것은?

보기

- ㉠ $2^5 \times 3$ ㉡ $2^4 \times 5^2$
 ㉢ $2 \times 3 \times 7$ ㉣ $2 \times 3 \times 5 \times 11$
 ㉤ $3^2 \times 5^3 \times 7$

[배점 4, 중중]

- ① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ ② ㉡, ㉢, ㉠, ㉤, ㉣
 ③ ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤ ④ ㉣, ㉡, ㉤, ㉣, ㉠
 ⑤ ㉣, ㉠, ㉤, ㉡, ㉢

해설

㉠ 12 개 ㉡ 15 개 ㉢ 8 개 ㉣ 16 개 ㉤ 24 개
 따라서 ㉢, ㉠, ㉡, ㉣, ㉤ 순서이다.

17. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n\text{미만의 자연수}\}$ 이고 집합 B 는 A 의 모든 부분집합을 원소로 하는 집합이다. 집합 B 의 부분집합의 개수가 256 일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 4

해설

$2^k = 256 = 2^8 \therefore k = 8$
 B 의 원소의 개수가 8 개 이므로, 집합 A 의 부분
 집합의 수는 8 개이다.
 $2^{(n\text{미만의 자연수 개수})} = 2^{n-1} = 8 = 2^3 \therefore n = 4$

18. 가로 의 길이와 세로 의 길이, 높이가 각각 8cm, 18cm, 6cm 인 직육면체 모양의 벽돌을 쌓아서 되도록 작은 정육면체를 만들 때, 필요한 벽돌은 몇 개인가? [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 432 개

해설

8, 18, 6 의 최소공배수는 72 이므로
 (필요한 벽돌의 수)
 $= (72 \div 8) \times (72 \div 18) \times (72 \div 6)$
 $= 9 \times 4 \times 12 = 432(\text{개})$

19. 희정이는 1 과 100 사이의 자연수 중에서 $\frac{1}{3}$ 을 곱하여도, $\frac{1}{8}$ 을 곱하여도 항상 자연수가 되는 수가 모두 몇 개인가를 조사하려고 한다. 희정이가 찾은 자연수는 모두 몇 개인가? [배점 5, 중상]

- ① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개
 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

구하는 수를 a 라 하면 $\frac{1}{3} \times a = (\text{자연수})$, $\frac{1}{8} \times a = (\text{자연수})$ 가 되는 a 는 3 과 8 의 공배수이므로, 3 과 8 의 최소공배수는 24 따라서 24, 48, 72, 96 의 4 개

20. A 와 B 가 함께 일자리를 구했다. A 는 4 일간 일하고 하루 쉬고, B 는 5 일간 일하고 이틀간 쉬기로 하였다. 이와 같이 180 일간 일한다면, 두 사람이 같이 쉬는 일수는? [배점 5, 중상]

- ① 5 일 ② 10 일 ③ 15 일
④ 20 일 ⑤ 35 일

해설

5 와 7 의 최소공배수는 35 ,
35 일 동안 B 가 쉬는 날은
6, 7, 13, 14, 20, 21, 27, 28, 34, 35 일,
이 중에 A 가 쉬는 날은 20, 35 일
따라서 180 일 동안 두 사람이 함께 쉬는 날은
 $2 \times 5 = 10$ (일) 이다.

21. $24 \times a = 90 \times b = c^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 c 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 모두 자연수이다.) [배점 5, 중상]

▶ 답 :
▶ 정답 : 60

해설

$24 \times a = 90 \times b = c^2$
 $24 \times a$ 와 $90 \times b$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야
하므로 소인수분해를 해 보면
 $2^3 \times 3 \times a = 2 \times 3^2 \times 5 \times b$
즉, c 는 24 과 90 의 공배수이므로 $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의
배수이다.
그러므로 가장 작은 c^2 은 $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 이어야 한다.
 $\therefore c = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

22. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개일 때 자연수 m 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 정답 : 9

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1\} \rightarrow n(A) = m$
(개)
원소 1 과 3 은 반드시 포함하고 5 와 $2m-1$ 은
반드시 포함하지 않는 부분집합의 개수가 32 개이
므로
 $2^{m-2-2} = 32, m-4 = 5$
 $m = 9$

23. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1 보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1, x \in A$ 이면, $\frac{3}{2}x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 정답 : $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로
집합 A 를 구하면,
 $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$
,
 $a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{9}{4}, a_5 = \frac{81}{16}$ 이다.
 $\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$

24. $10^5 + 10^3$ 은 십진법으로 타나내면 m 자리 수이고, $2^4 + 2$ 은 이진법으로 나타내면 n 자리 수이다. $m + n$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$10^5 + 10^3 = 1 \times 10^5 + 1 \times 10^3 = 101000$$

$$\therefore m = 6$$

$$2^4 + 2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2 = 10010_{(2)}$$

$$\therefore n = 5$$

$$\therefore 6 + 5 = 11$$

25. $11_{(2)} < A \leq 10011_{(2)}$ 을 만족하는 자연수 A 중 소수는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

$$11_{(2)} = 3, 10011_{(2)} = 19$$

$3 < A \leq 19$ 인 소수는 5, 7, 11, 13, 17, 19 로 6 개이다.