

단원 종합 평가

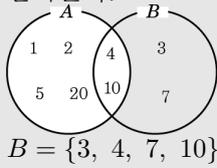
1. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 약수}\}$ 이고, $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 5, 7, 20\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: $B = \{3, 4, 7, 10\}$

해설

벤 다이어그램을 그려서 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ 을 알아본다.



2. 집합 $\{a, b, c\}$ 의 부분집합을 구하는 과정이다. 원소 a, b, c 중에서 원소를 골라 부분집합을 만들 때, 각 원소는 부분집합에 속하거나, 속하지 않는 2 가지 경우가 생기므로 다음 그림과 같이 구할 수 있다.

원소	a	b	c	부분집합
속함 : ○ 속하지않음 : ×	○	○	○	→ {a, b, c}
		○	×	→ {a, b}
		×	○	→ {a, c}
	×	○	○	→ {b, c}
		○	×	→ {b}
		×	○	→ {c}
			→ ∅	

이와 같은 방법으로 집합 $\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 16 개

해설

$\{a, b, c, d\}$ 의 부분집합의 개수를 구해보면 다음과 같다.

원소	a	b	c	d	부분집합
속함 : ○ 속하지않음 : ×	○	○	○	○	→ {a, b, c, d}
			○	×	→ {a, b, c}
			×	○	→ {a, b, d}
			×	×	→ {a, b}
		×	○	○	→ {a, c, d}
			○	×	→ {a, c}
			×	○	→ {a, d}
			×	×	→ {a}
	×	○	○	○	→ {b, c, d}
			○	×	→ {b, c}
			×	○	→ {b, d}
			×	×	→ {b}
		×	○	○	→ {c, d}
			○	×	→ {c}
			×	○	→ {d}
			×	×	→ ∅

따라서 부분집합의 개수는 16 개이다.

3. 두 집합 $A = \{2, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 에 대하여 집합 B 의 부분집합 중 집합 A 의 원소를 포함하는 부분집합의 개수는? [배점 3, 중하]

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개
 ④ 6개 ⑤ 8개

해설

집합 B 의 부분집합 중 집합 A 의 원소를 포함하는 부분집합을 구하면 $\{2, 4\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 4, 6, 8\}$ 이고 총 4개이다.

4. 두 자연수 15 와 18 , 어느 것으로 나누어도 4 가 남는 자연수 중에서 가장 작은 수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ **답:**

▶ **정답:** 94

해설

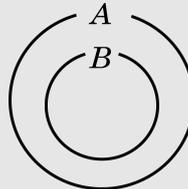
3) $\begin{array}{r} 12 \quad 15 \\ 4 \quad 5 \\ \hline \end{array}$
 최소공배수 : $3 \times 5 \times 6 = 90$
 구하는 수는 $90 + 4 = 94$

5. 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]

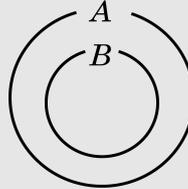
- ① $A \cup B = B \cup A$
 ② $A \cup \emptyset = A$
 ③ $(A \cap B) \subset A$
 ④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$
 ⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = A$

해설

- ③ $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$
 ④ $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$



- ⑤ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$



6. 전체집합 U 의 부분집합을 A 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하지 않는 것을 모두 고르면?(정답 2 개) [배점 4, 중중]

- ① $(A^c)^c = A$ ② $A \cup A^c = U$
 ③ $A \cap A^c = A$ ④ $U^c = A$
 ⑤ $\emptyset^c = U$

해설

- ③ $A \cap A^c = \emptyset$
 ④ $U^c = \emptyset$

7. 집합 $X = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x|x \text{는 } 4 \text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B = X$ 가 되는 집합 B 의 개수를 구하여라. [배점 4, 중중]

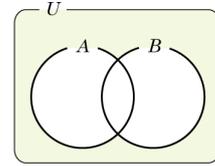
▶ 답:

▷ 정답: 8개

해설

$X = \{1, 2, 4, 8\}$, $A = \{1, 2, 4\}$ 이고
 $A \cup B = X$ 가 되어야 하므로 집합 B 는 원소 8을 반드시 포함해야 한다.
 따라서, 집합 B 는
 $\{8\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 8\}$,
 $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$
 이므로 8개이다.

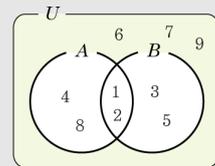
8. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



[배점 4, 중중]

- ① $\{6\}$ ② $\{5, 7\}$ ③ $\{5, 6, 7\}$
 ④ $\{6, 7, 8\}$ ⑤ $\{6, 7, 9\}$

해설



$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 색칠한 부분은 $\{6, 7, 9\}$ 이다.

9. 72 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 두 자리의 자연수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$$72 \times n = 2^3 \times 3^2 \times n = m^2 \text{ 이라 하면}$$

가장 작은 $n = 2$

따라서 n 은

$$2 \times 1^2 = 2$$

$$2 \times 2^2 = 8$$

$$2 \times 3^2 = 18$$

$$2 \times 4^2 = 32$$

그러므로 가장 작은 두 자리의 자연수 n 은 18 이다.

10. 집합 $A = \{1, 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^2 = 4 \text{ (개) 이므로 } n(B) = 4 \text{ 이다.}$$

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는

$$2^{n(B)} = 2^4 = 16 \text{ (개) 이다.}$$

11. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

[배점 5, 중상]

① $n(\{0\}) = 1$

② $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$

③ $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$

④ $n(\{0\}) < n(\{1\})$

⑤ $n(\{1, \{2, 3\}, 4, 5\}) = 4$

해설

② $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

③ $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$

④ $n(\{0\}) = n(\{1\}) = 1$

12. 다음 식의 결과를 이진법으로 나타내면 끝자리의 0은 몇 개가 연속으로 오는지 구하여라.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 8 개

해설

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5$$

$$= 1 \times 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

따라서 2^8 의 배수이므로 끝자리의 0이 연속으로 8개 온다.

13. 어느 반의 여학생 수는 36 명이고 남학생 수는 45 명이다. 봉사활동을 하기 위해 여학생 a 명과 남학생 b 명씩을 한 조로 나누려고 한다. 이때 되도록 많은 조로 나누어서 나누어진 조의 수를 c 라 할 때, $2a - b + c$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

c 는 36 과 45 의 최대공약수이므로 $c = 9$,
 $a = 36 \div 9 = 4$, $b = 45 \div 9 = 5$
 따라서 $2a - b + c = 8 - 5 + 9 = 12$

14. 서로 다른 두 자연수 a, b 의 모든 약수의 집합을 각각 A, B 라고 할 때, 다음 중 a, b 가 서로소인 것은?

[배점 5, 중상]

- ① $A \cap B = \emptyset$ ② $A \cap B = \{1\}$
 ③ $A \cap B = \{a, b\}$ ④ $A \cap B = \{0\}$
 ⑤ $A \cap B = \{\emptyset\}$

해설

$A \cap B$ 는 a, b 의 공약수의 집합이고, 두 수의 공약수는 최대공약수의 약수와 같다.
 한편, a, b 가 서로소일 때, 두 수의 최대공약수는 1 이다.
 $\therefore A \cap B = \{1\}$

15. $n = 3p^2q$ 일 때, n 의 약수의 개수를 구하여라. (단, $p \neq q \neq 3$ 인 소수)

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 12개

해설

$p \neq q \neq 3$ 인 소수이므로, n 을 소인수분해하면
 $n = 3p^2q = 3 \times p^2 \times q$ 이다.
 따라서 약수의 개수는 $(1+1) \times (2+1) \times (1+1) = 12$ (개) 이다.

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 34$, $n(B) = 15$, $n(A^c \cap B^c) = 7$ 일 때, $n(U)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 최댓값은 56

▷ 정답: 최솟값은 41

해설

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 7$,
 $n(A) = 34$, $n(B) = 15$ 이므로,
 $0 \leq n(A \cap B) \leq 15$ 이고,
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 49 - n(A \cap B)$
 따라서 $n(A \cup B)$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 49 , 34 이므로
 $n(U)$ 의 최댓값은 $49 + 7 = 56$, 최솟값은 $34 + 7 = 41$

17. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2}x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:
 ▷ 정답: $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$$

, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{9}{4}$, $a_5 = \frac{81}{16}$ 이다.

$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$

18. 100과 서로소인 두 자리 자연수의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:
 ▷ 정답: 36개

해설

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

→ 100과 서로소인 수는 2의 배수가 아니고, 5의 배수가 아니어야 한다.

$U = \{10, 11, \dots, 99\}$ 이고, 2의 배수의 집합을 A_2 , 5의 배수의 집합을 A_5 라 두면,

100과 서로소인 두 자리 자연수의 개수 = $n(U) - n(A_2) - n(A_5) + n(A_2 \cap A_5) = 90 - 45 - 18 + 9 = 36$

19. 48에 어떤 수 x 를 곱하여 자연수의 제곱이 되도록 하려 한다. 이러한 x 중 두 번째로 작은 수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:
 ▷ 정답: 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로

가장 작은 $x = 3$

두 번째로 작은 수는 $2^2 \times 3 = 12$

20. $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$ 를 이진법으로 나타낸 것은? [배점 5, 상하]

- ① $1011_{(2)}$
- ② $1110_{(2)}$
- ③ $10101_{(2)}$
- ④ $10110_{(2)}$
- ⑤ $10010_{(2)}$

해설

생략된 자리에는 0을 써 준다.

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$$

$$= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

$$= 10110_{(2)}$$

21. 세 변의 길이가 88m, 96m, 120m인 삼각형 모양인 땅의 가장자리에 일정한 간격으로 말뚝을 박으려고 한다. 세 모퉁이에는 반드시 말뚝을 박고, 가능한 적은 수의 말뚝을 박을 때, 필요한 말뚝의 수는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 38개

해설

88, 96, 120의 최대공약수는 8이므로 8m 간격으로 말뚝을 박으면 된다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{필요한 말뚝의 수}) &= (88 \div 8) + (96 \div 8) + (120 \div 8) \\ &= 11 + 12 + 15 \\ &= 38(\text{개}) \end{aligned}$$

22. 학생 수가 n 명인 학급의 학생 중, 남학생의 집합을 M , 여학생의 집합을 W 라고 하고, 안경을 쓴 학생의 집합을 G , 안경을 쓰지 않은 학생의 집합을 E 라고 하고, 네 집합에 대하여 $n(M \cap G) = a$, $n(M \cap E) = b$, $n(W \cap G) = c$ 라고 한다. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \odot B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ 이라고 정의할 때, $n((M \odot E) \odot (W \odot G))$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답:

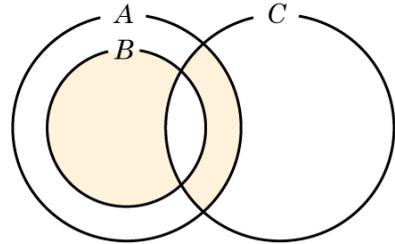
▷ 정답: 0

해설

	M	W
G	a	c
E	b	n-a-b-c

$$\begin{aligned} n(M \odot E) &= a + (n - a - b - c) = n - b - c \\ n(W \odot G) &= a + (n - a - b - c) = n - b - c \\ n(M \odot E) &= n(W \odot G) \text{ 이므로,} \\ \therefore n((M \odot E) \odot (W \odot G)) &= 0 \end{aligned}$$

23. 다음 벤 다이어그램에서 $n(A) = 20$, $n(B) = 10$, $n(C) = 15$, $n(B \cup C) = 21$, $n(A \cup B \cup C) = 25$ 일 때, 빗금 친 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답:

▷ 정답: 12개

해설

$B \subset A$ 이므로 $A \cup B \cup C = A \cup C$ 이다.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \rightarrow n(A \cap C) = 10,$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \rightarrow n(B \cap C) = 4,$$

빗금 친 부분은 $(B - C) \cup ((A \cap C) - (B \cap C))$ 이므로,

$$n((B - C) \cup ((A \cap C) - (B \cap C))) = n(B) - n(B \cap C) + n(A \cap C) - n(B \cap C) = 10 - 4 + 10 - 4 = 12$$

24. 자연수 x, y, z 가 $x : y : z = 3 : 8 : 10$ 을 만족하고,
 x, y, z 의 최대공약수와 최소공배수의 합이 1452 일 때,
 x, y, z 를 각각 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = 36$

▷ 정답: $y = 96$

▷ 정답: $z = 120$

해설

$x = 3a, y = 8a, z = 10a$ 라 두면,
 x, y, z 의 최대공약수 = a , 최소공배수 = $120 \times a$
 이다.

$$121 \times a = 1452 \rightarrow a = 12$$

$$\therefore x = 36, y = 96, z = 120$$

25. 다음 중 가장 큰 수는? [배점 6, 상중]

① 3^3

② $2^5 - 3$

③ $100001_{(2)} - 1$

④ $1110_{(2)}$

⑤ 4^2

해설

①, 27

②, 29

③, 32

④, 14

⑤, 16