단원 종합 평가

1. 두 집합 A, B 가 $A = \{(x,\ y)|x + y = 9,\ x,\ y$는 자연수$\}$,
$B = \{(x,\ y)|2x + y = 11,\ x,\ y$는 자연수$\}$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

집합 A 의 x, y 값을 표로 나타내면

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1

이고, 집합 B 의 x, y 값을 표로 나타내면

x	1	2	3	4	5	6
y	9	7	5	3	1	-1

이다. 따라서 x, y 값이 자연수인 순서쌍의 개수를 구하면

$n(A) = 8$, $n(B) = 5$ 이므로 $n(A) - n(B) = 3$ 이다.

2. $A = \{(x,\ y)\mid 2(0.1x - 0.2y) = 1\}$, $B = \left\{(x,\ y)\mid \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 4\right\}$ 일 때, $A \cap B$ 의 원소를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : $(9, 2)$

해설

A 식의 양변에 10 을 곱한다.

$20(0.1x - 0.2y) = 10$

$2x - 4y = 10 \cdots ①$

B 식의 양변에 6 을 곱한다.

$2x + 3y = 24 \cdots ②$

① − ② 하면 $-7y = -14$

$\therefore\ x = 9,\ y = 2$

3. 일정한 속력으로 달리고 있는 기차가 길이 1500m 인 철교를 지나는 데에는 1 분 30 초가 걸렸고, 길이가 3000m 인 터널을 통과하는데 2 분이 걸렸다. 이 기차의 분속을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3000 m/min

해설

기차의 길이 xm , 기차의 속력 ym/분 이라 하면 $\begin{cases} 1500 + x = \frac{3}{2}y \cdots ㉠ \\ 3000 + x = 2y \cdots ㉡ \end{cases}$ ㉡−㉠을 하면$1500 = \frac{1}{2}y\ y = 3000$

$\therefore$ 기차의 속력은 3000m/분

4. 문구점에서 600 원짜리 볼펜과 500 원짜리 연필을 합하여 13 자루 사고 7000 원을 지불하였다. 각각 몇 개씩 샀는지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 볼펜= 5 자루

▷ 정답 : 연필= 8 자루

해설

볼펜을 x , 연필을 y 라고 하면

$\begin{cases} x + y = 13 \\ 600x + 500y = 7000 \end{cases}$

두 식을 연립하여 풀면 $x = 5$, $y = 8$ 이다.

5. 미지수가 2개인 일차방정식 $3x+y=15$ 의 그래프가 좌표평면에서 지나지 않는 사분면을 구하여라.

[배점 4, 중중]

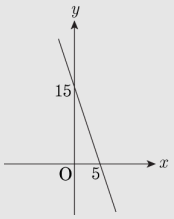
▶ 답:

▷ 정답: 제 3 사분면

해설

$3x+y=15$ 를 만족하는 순서쌍은 $\cdots, (0, 15), (5, 0), \cdots$ 이 있다.

그래프를 그리면 다음 그림과 같이 나타난다.



6. 다음 일차방정식 중에서 순서쌍 $(2, -1)$ 이 해가 되는 것은?

[배점 4, 중중]

① $5x-2y=8$ ② $3x-2y=8$

③ $4x-y=8$ ④ $2x+3y=8$

⑤ $-2x-4y=8$

해설

② $x=2,\ y=-1$ 을 대입하면 $6+2=8$ 이다.

7. 두 집합 A, B 에서 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=13,\ x,y$는 자연수$\}$, $B=\{(x,y)\mid 4x-y=3,\ x,y$는 자연수$\}$ 일 때, $A\cap B$ 는?

[배점 4, 중중]

① $\{(1, 3)\}$ ② $\{(2, 5)\}$ ③ $\{(3, 1)\}$

④ $\{(4, 13)\}$ ⑤ $\{(5, 2)\}$

해설

$4x+y=13$ 과 $4x-y=3$ 을 모두 만족하는 (x,y) 를 구한다.

8. 다음 연립방정식을 풀면?

$$\begin{cases} y-2x=3(y-x)-6 \\ 2(x+y)=y-2 \end{cases}$$

[배점 4, 중중]

① $x=\frac{8}{3},\ y=\frac{13}{3}$ ② $x=2,\ y=-2$

③ $x=-\frac{2}{3},\ y=\frac{8}{3}$ ④ $x=-\frac{8}{3},\ y=-\frac{13}{3}$

⑤ $x=-2,\ y=2$

해설

주어진 연립방정식을 정리하면

$$\begin{cases} x-2y=-6 & \cdots ㉠ \\ 2x+y=-2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ × 2 를 하면 $5x=-10 \quad \therefore x=-2$

$x=-2$ 를 ㉡에 대입하면 $-4+y=-2 \quad \therefore y=2$

9. 어떤 농장에서 돼지와 닭을 합하여 총 20 마리를 사육하고 있다. 돼지의 다리와 닭의 다리 수를 합하면 모두 58 개라고 한다. 돼지와 닭은 각각 몇 마리씩인가?

[배점 4, 중중]

① 돼지 : 7 마리, 닭 : 13 마리

② 돼지 : 8 마리, 닭 : 12 마리

③ 돼지 : 9 마리, 닭 : 11 마리

④ 돼지 : 10 마리, 닭 : 10 마리

⑤ 돼지 : 11 마리, 닭 : 9 마리

해설

돼지를 x 마리, 닭을 y 마리라고 하면

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 4x+2y=58 \end{cases}$$

연립하여 풀면 $x=9,\ y=11$ 이다.

10. 일차방정식 $3x-2y=10$ 의 그래프가 두 점 A $(p,\ 1)$, B $(3,\ q)$ 를 지날 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $3p-2=0$ ㉡ $9-2q=10$
㉢ $p+8q=0$ ㉣ $2(p-q)=7$
㉤ $(p-\frac{1}{2}q)=17$

[배점 5, 중상]

① ㉠, ㉢ ② ㉡, ㉢

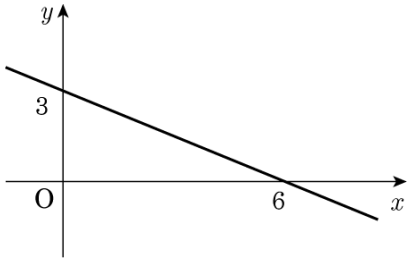
③ ㉠, ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$3x-2y=10$ 에 $A(p,\ 1)$ 을 대입하면 $3p-2=10$
$3x-2y=10$ 에 B $(3,\ q)$ 를 대입하면 $9-2q=10$
따라서, $p=4,\ q=-\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있고,
이것을 각각 대입하면 ㉠ $3p-2=10$, ㉣ $2(p-q)=9$, ㉤ $p-\frac{1}{2}q=\frac{17}{4}$

11. 다음 그림은 일차방정식 $ax - by + 6 = 0$ 의 그래프이다. 순서쌍$(4,\ m)$, $(n,\ 2)$ 가 이 일차방정식의 해의 일부일 때, $m - n$ 의 값은?



[배점 5, 중상]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

x 절편과 y 절편을 대입하여 a, b 의 값을 찾는다.
$(0, 3)$ 을 대입하면, $b = 2$ 이고, $(6,\ 0)$ 을 대입하면 $a = -1$ 이다.
따라서 주어진 식은 $-x - 2y + 6 = 0$ 이고, 여기에 $(4,\ m)$ 을 대입하면 $m = 1$ 이고,
$(n,\ 2)$ 를 대입하면 $n = 2$ 가 된다.
$\therefore m - n = 1 - 2 = -1$

12. 연립방정식 $\begin{cases} 3x + 2(y-1) = 3 \\ 3(x-2y) + 5y = 2 \end{cases}$ 의 해가 $x = a$, $y = b$ 일 때, ab 의 값은? [배점 5, 중상]

① 1 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} 3x + 2(y-1) = 3 \\ 3(x-2y) + 5y = 2 \end{cases}$ 을 정리하면

$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ 이므로

$3y = 3$, $y = 1$, $x = 1$ 이다.
따라서 $ab = 1$ 이다.

13. 연립방정식 $\begin{cases} 3x + 2y = 4 & \cdots ㉠ \\ x - 4y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 에서 y 를 소거하여 풀 때, 필요한 식은? [배점 5, 중상]

① ㉠ + ㉡ × 3 ② ㉠ + ㉡ × 2
③ ㉡ × 4 − ㉠ × 3 ④ ㉡ × 2 + ㉠ + ㉡
⑤ ㉠ × 2 + ㉡

해설

y 를 소거하기 위해서 식 ㉠에 2 를 곱하여 y 계수의 절댓값을 4 로 같게 만들어 준다.
㉠과 ㉡의 y 계수의 부호가 다르므로 두 식을 더하여 소거한다.

14. 그릇에 농도가 다른 두 소금물 A , B가 있다. A 소금물 100 g과 B 소금물 200 g을 섞으면 농도가 20% 의 소금물이 되고, A 소금물 300 g과 B 소금물 100 g을 섞으면 25% 의 소금물이 되었을 때, A 소금물과 B 소금물의 농도를 각각 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 28% , 16%

해설

소금물 A의 농도를 $x\%$, 소금물 B의 농도를 $y\%$ 라고 하면

$$\begin{cases} \frac{x}{100}\times 100+\frac{y}{100}\times 200=\frac{20}{100}\times 300 \\ \frac{x}{100}\times 300+\frac{y}{100}\times 100=\frac{25}{100}\times 400 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=60 \cdots ㉠ \\ 3x+y=100 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=28,\ y=16$ 이다.

15. C 회사의 A 상품과 B 상품의 한 개당 원가는 각각 800 원, 500 원이다. A 상품은 원가의 70% , B 상품은 원가의 80% 의 이익이 생긴다고 할 때, A 와 B 상품을 합하여 1200 개를 팔았더니 60 만 원의 이익이 생겼다. A , B 상품을 몇 개 팔았는지 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : A 상품 750 개

▷ 정답 : B 상품 450 개

해설

A 상품의 개수를 x 개, B 상품의 개수를 y 개라고 하자.

A 상품은 한 개당 70% 의 이익이 남으므로 $800\times\frac{70}{100}=560$ (원) 이고,

B 상품은 한 개당 80% 의 이익이 남으므로 $500\times\frac{80}{100}=400$ (원) 이다.

A와 B를 하바여 1200 개를 팔아서 60 만원의 이익이 생겼다고 했으므로,

$$\begin{cases} x+y=1200 \\ 560x+400y=600000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1200 \cdots ㉠ \\ 56x+40y=60000 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡−㉠ × 40 을 하면 하면 $x=750$ 이다.

x 를 ㉠에 대입하면 $y=450$ 이다.

따라서, A 상품 750 개, B 상품 450 개를 팔았다.

16. 다음 중 일차방정식 $\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}y+2=0$ 의 해가 아닌 것은? [배점 5, 상하]

① $(-6,0)$ ② $(3,4)$ ③ $(0,8)$

④ $(-3,\frac{4}{3})$ ⑤ $(6,\frac{16}{3})$

해설

$x=0, y=8$ 일 때

$\frac{1}{3}\times 0-\frac{3}{4}\times 8+2\neq 0$ 이므로 해가 아니다.

17. 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}-\dfrac{1}{z+y} & =1 \\ \dfrac{4}{y+z}+\dfrac{2}{x+z} & =2 \\ \dfrac{4}{z+x}+\dfrac{3}{x+y} & =-3 \end{cases}$$

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x=\dfrac{1}{2}$

▷ 정답: $y=\dfrac{5}{2}$

▷ 정답: $z=-\dfrac{3}{2}$

해설

$\dfrac{1}{x+y}=A, \dfrac{1}{y+z}=B, \dfrac{1}{z+x}=C$ 라 하면

$6A-B=1$

$4B+2C=2$

$4C+3A=-3$

연립방정식을 풀면, $A=\dfrac{1}{3}, B=1, C=-1$, 따라서

$\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{y+z}=1, \dfrac{1}{z+x}=-1$ 이므로

$x+y=3$, $y+z=1$, $z+x=-1$

$x+y+z=\dfrac{3}{2}$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{5}{2}, z=-\dfrac{3}{2}$

18. 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=7 \\ bx-ay=-1 \end{cases}$ 에서 a, b 를 잘못 보고 바꾸어 놓고 풀었더니 $x=-1$, $y=2$ 를 얻었다. 처음 주어진 연립방정식을 풀어라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x=\dfrac{11}{5}$

▷ 정답: $y=-\dfrac{2}{5}$

해설

잘못된 식에 x, y 값을 대입하면

$\begin{cases} bx+ay=7 \\ ax-by=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a-b=7 & \cdots ① \\ -a-2b=-1 & \cdots ② \end{cases}$

① + ② × 2 하면 $a=3$, $b=-1$

$\begin{cases} ax+by=7 \\ bx-ay=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-y=7 & \cdots ③ \\ -x-3y=-1 & \cdots ④ \end{cases}$

③ + ④ × 3 하면, $x=\dfrac{11}{5}$, $y=-\dfrac{2}{5}$

19. $y=\frac{2}{5}$ 일 때, $(x+8):(-y-4x+2):(y+x-m)=6:4:3$ 이다. 상수 m 의 값을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$(x+8):(-y-4x+2):(y+x-m)=6:4:3$ 에서

$\frac{x+8}{6}=\frac{-y-4x+2}{4}=\frac{y+x-m}{3}$, 각 변에 12 를 곱하여 식을 간단히 하면

$2(x+8)=3(-y-4x+2)=4(y+x-m)$

$2(x+8)=3(-y-4x+2)$ 에서 $14x+3y=-10\cdots$㉠

$3(-y-4x+2)=4(y+x-m)$ 에서 $16x+7y=4m+6\cdots$㉡

$y=\frac{2}{5}$ 이므로 ㉠에 대입하면 $x=-\frac{4}{5}$

따라서$x=-\frac{4}{5}, y=\frac{2}{5}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-4$

20. 서로 다른 농도의 소금물 A, B 가 100g 씩 있다. A 의 절반을 B 에 넣고 잘 섞은 후, 다시 B 의 절반을 A 로 옮겨 섞었더니 A 는 9% 의 소금물, B 는 6% 의 소금물이 되었다. 처음 두 소금물 A, B 의 농도를 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: A = 13.5 %

▷ 정답: B = 2.25 %

해설

소금물 A, B 의 농도를 각각 $a\%$, $b\%$ 라 하면

A 의 절반을 B 에 섞었을 때

A :(소금물의 양)= 50g

(소금의 양)= $50\times\frac{a}{100}=\frac{a}{2}$ (g)

B :(소금물의 양)= 150g

(소금의 양)=$\frac{a}{2}+100\times\frac{b}{100}=\frac{a}{2}+b$ (g)

다시 B 의 절반을 A 에 섞었을 때

A :(소금물의 양)= $50+75=125$ (g)

(소금의 양)= $\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+b\right)=\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b$ (g)

(농도)= $\frac{\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b}{125}\times100=9$

$\therefore\ 3a+2b=45\ \cdots$㉠

B :(소금물의 양)= 75g

(소금의 양)= $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+b\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}$ (g)

(농도)= $\frac{\frac{a}{4}+\frac{b}{2}}{75}\times100=6$

$\therefore\ a+2b=18\ \cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$a=\frac{27}{2}=13.5\ (\%),\ b=\frac{9}{4}=2.25\ (\%)$

21. 매 시간마다 일정한 양의 물이 빠져 나가는 물탱크가 있다. 이 물탱크에 작업능률이 같은 두 사람이 물을 가득 채우는 데 4 시간이 걸리고, 세 명이 물을 가득 채우는 데는 2 시간 30 분이 걸린다. 만약 작업능률이 같은 7 명이 물을 채운다면 얼마 만에 물탱크를 가득 채울 수 있는지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1 시간

해설

1 시간마다 채워 넣는 물의 양을 a, 1 시간마다 빠져나가는 물의 양을 b 라 하면

물탱크를 가득 채웠을 때의 물의 양은

$2 \times 4a - 4b = 3 \times 2.5a - 2.5b$

$a = 3b$ 이므로 물탱크의 크기는 $20b$

작업능력이 같은 7 명이 물을 가득 채워 넣을 때 걸리는 시간을 t 라 하면

$7 \times ta - tb = 20b$

$t(7a - b) = 20b$

$a = 3b$ 를 대입하면

$t = \dfrac{20b}{7a - b} = \dfrac{20b}{20b} = 1$ (시간)

22. 직선 $x-ay-1=0$ 이 세 점 $(-3,\ -2)$, $(5,\ b)$, $(c,\ -4)$ 를 지날 때, $a-b+c$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(-3,\ -2)$ 를 $x - ay - 1 = 0$ 에 대입하면,

$-3 + 2a - 1 = 0,\ a = 2$

$(5, b)$ 를 $x - 2y - 1 = 0$ 에 대입하면,

$5 - 2b - 1 = 0,\ b = 2$

$(c,\ -4)$ 를 $x - 2y - 1 = 0$ 에 대입하면,

$c + 8 - 1 = 0,\ c = -7$

$\therefore\ a - b + c = 2 - 2 - 7 = -7$

23. 집합 $A = \left\{(x,\ y) \,\middle|\, \dfrac{1}{2}x + y = 6,\ \ x,\ y \text{ 는 자연수}\right\}$ 일 때, $n(A)$ 의 값을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{(2,5), (4,4), (6,3), (8,2), (10,1)\}$ 이므로

$n(A) = 5$

24. 자연수 a, b 에 대하여 x, y, z 에 대한 연립방정식 $\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{x+2y}{3b} = -\dfrac{x}{2ab} = z$ 가 무수히 많은 해 집합을 가질 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x+y}{a} = \dfrac{x+2y}{3b} = -\dfrac{x}{2ab} = z$

$x + y - az = 0 \cdots ㉠$

$x + 2y - 3bz = 0 \cdots ㉡$

$x + 2abz = 0 \cdots ㉢$

㉢에서 $x = -2abz$ 이므로 ㉠에 대입하면

$-2abz + y - az = 0$

$y = (2ab + a)z \cdots ㉣$

㉡에 ㉢, ㉣을 대입하면 $(2ab + 2a - 3b)z = 0$

그런데 $z \neq 0$ 이므로

$2ab + 2a - 3b = 0$, $2a(b+1) = 3b$

$2a = \dfrac{3b}{b+1} = 3 - \dfrac{3}{b+1}$

이때, a, b 는 자연수이므로 $b+1 = 3$, $a = 1, b = 2$

따라서 $a + b = 3$

25. 어느 극장에서 영화 A, B 를 연속으로 상영하였다. 영화 A 의 관람 요금은 8000 원, 영화 B 의 관람 요금은 9000 원, 영화 A, B 를 함께 보는 관람 요금은 15000 원이고, 처음에 입장한 관객 수는 57 명, 마지막에 나온 관객수는 51 명이었다. 이 날 이 연속 상영 관람의 매출액이 829000 원일 때, 영화 A 만 관람한 관객 수와 영화 B 만 관람한 관객 수를 각각 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: A : 14 명

▷ 정답: B : 8 명

해설

영화 A 만 관람한 관객을 x , 영화 B 만 관람한 관객을 y 명이라 하면

$57 - x + y = 51$, $x - y = 6$

$15000(57 - x) + 8000x + 9000y = 829000$, $7x - 9y = 26$

두 식을 연립하여 풀면 $x = 14$, $y = 8$

따라서 영화 A 만 관람한 관객은 14 명, 영화 B 만 관람한 관객은 8 명이다.