

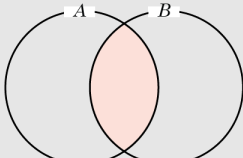
단원 종합 평가

1. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?
[배점 3, 중하]

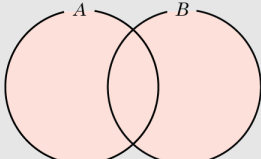
- ① $A \cap \emptyset = A$
 ② $B \cup \emptyset = \emptyset$
 ③ $(A \cap B) \subset B$
 ④ $(A \cup B) \subset A$
 ⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

해설

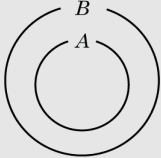
- ① $A \cap \emptyset = \emptyset$
 ② $B \cup \emptyset = B$
 ③ $(A \cap B) \subset B$



- ④ $(A \cup B) \supset A$



- ⑤ $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$



2. 두 자연수의 곱이 720 이고 최대공약수가 6 일 때, 두 수의 최소공배수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

(두 수의 곱) = (최대공약수) × (최소공배수) 이므로
 $720 = 6 \times (\text{최소공배수})$
 따라서 최소공배수는 120 이다.

3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 일 때, 다음 두 조건을 만족시키는 집합 X 는 모두 몇 개인가?

- (1) $(A \cap B) \cup X = X$
 (2) $(A \cup B) \cap X = X$

[배점 4, 중중]

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개

- ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

(1) 과 (2) 에서 $(A \cap B) \subset X$, $X \subset (A \cup B)$ 이므로
 $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

$\therefore \{4, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소 4, 5 를 반드시 포함하는 부분집합이다.

$\therefore (\text{집합 } X \text{ 의 개수}) = 2^4 = 16 \text{ (개)}$

4. 다음 중 약수의 개수가 다른 것은? [배점 4, 중중]

- ① $2^3 \times 3^2$ ② 11^{11}
 ③ $3^2 \times 5 \times 7^2$ ④ 5×7^5
 ⑤ $2 \times 3 \times 7^2$

해설

- ① $(3+1) \times (2+1) = 4 \times 3 = 12$ (개)
 ② $11+1 = 12$ (개)
 ③ $(2+1) \times (1+1) \times (2+1) = 3 \times 2 \times 3 = 18$ (개)
 ④ $(1+1) \times (5+1) = 2 \times 6 = 12$ (개)
 ⑤ $(1+1) \times (1+1) \times (2+1) = 2 \times 2 \times 3 = 12$ (개)

5. 120 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.
 [배점 4, 중중]

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 30$

▷ 정답: $b = 60$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 곱할 수 있는 수는
 $2 \times 3 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.
 $\therefore a = 2 \times 3 \times 5 \times 1^2 = 30$
 $120 \times a = 2^3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5$
 $= 2^4 \times 3^2 \times 5^2$
 $= (2^2 \times 3 \times 5)^2$
 $= b^2$
 $\therefore b = 60$

6. 지윤이네 학교 학생 170 명 중 A 문제를 푼 학생이 80 명, B 문제를 푼 학생이 90 명, A 문제와 B 문제를 모두 푼 학생이 15 명일 때, A 문제와 B 문제 중 어느 것도 풀지 못한 학생은 몇 명인가? [배점 5, 중상]

- ① 10 명 ② 12 명 ③ 14 명
 ④ 15 명 ⑤ 16 명

해설

전체집합을 U , A 문제를 푼 학생들의 집합을 A , B 문제를 푼 학생들의 집합을 B 라고 하면
 $n(U) = 170$
 $n(A) = 80, n(B) = 90, n(A \cap B) = 15$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 80 + 90 - 15$
 $= 155$
 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$
 $= 170 - 155$
 $= 15$

7. 504 를 자연수 a 로 나눈 값이 자연수 b 의 제곱이 될 때, $a+b$ 의 최소값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$\frac{504}{a} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 7}{a} = b^2$ 이므로
 $a = 2 \times 7, 2^3 \times 7, 2 \times 3^2 \times 7, 504$ 가 가능하다.
 $a = 2 \times 7$ 일 때, $b^2 = 6^2 \quad \therefore b = 6$
 $a = 2^3 \times 7$ 일 때, $b^2 = 3^2 \quad \therefore b = 3$
 $a = 2 \times 3^2 \times 7$ 일 때, $b^2 = 2^2 \quad \therefore b = 2$
 $a = 504$ 일 때, $b = 1$
 $\therefore (a+b \text{의 최소값}) = 14 + 6 = 20$

8. 네 자리의 이진법으로 나타낸 수 중에서 10 보다 큰 수는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

가장 큰 네 자리의 이진법 수는 $1111_{(2)}$ 이다.
 $1111_{(2)} = 15$ 이므로 11, 12, 13, 14, 15 로 5 개 이다.

9. 두 자연수 a, b 에 대하여 $2 \times 5^a \times 11^b$ 의 약수가 12 개일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1+1) \times (a+1) \times (b+1) = 12$
 $(a+1) \times (b+1) = 6$
 $a+1 = 2, b+1 = 3$ 또는 $a+1 = 3, b+1 = 2$
 $a = 1, b = 2$ 또는 $a = 2, b = 1$
 $\therefore a + b = 1 + 2 = 3$

10. 전체집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 의 두 부분집합 $A = \{7, 19\}$, $B = \{3, 5, 7, 11, 13\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 모두 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$A \cup X = X, X \cap (B - A) = \{5, 11\}$$

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cup X = X$ 이므로 $A \subset X$
 $\therefore 7, 19$ 는 X 의 원소
 $B - A = \{3, 5, 11, 13\}$ 이고
 $X \cap (B - A) = \{5, 11\}$ 이므로
5, 11 은 X 의 원소이고 3, 13 은 X 의 원소가 아니다.
따라서 X 는 5, 7, 11, 9 를 포함하고 3, 13 은 포함하지 않는 전체집합 U 의 부분집합이므로
 $2^{8-4-2} = 2^2 = 4(\text{개})$

11. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 작은 순서로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 으로 나타낼 때, $a_2 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하여라.

- 집합 A 의 원소는 항상 1보다 크거나 같다.
- $a_1 = 1$, $x \in A$ 이면, $\frac{3}{2}x \in A$ 이다.

[배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{141}{16}$

해설

$a_1 = 1$ 이면 $a_2 = \frac{3}{2} \times a_1$ 이고 이러한 방식으로 집합 A 를 구하면,

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^{(n-1)} \times a_1\right\}$$

$$a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{9}{4}, a_5 = \frac{81}{16} \text{이다.}$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_5 = \frac{141}{16}$$

12. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \{x | k < x \leq 20k \text{인 자연수}\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$$A_1 = \{2, 3, \dots, 20\}$$

$$A_2 = \{3, 4, \dots, 40\}$$

$$A_3 = \{4, 5, \dots, 60\}$$

⋮

$$A_{10} = \{11, 12, 13, \dots, 200\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10} = \{11, 12, \dots, 20\}$$

$$\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{10}) = 10$$

13. 집합 $A_N = \{x | x \text{는 } N \text{의 약수}\}$ 로 정의한다. A_N 의 진부분집합의 개수가 7개일 때, N 의 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

A_N 의 진부분집합의 개수가 7개라면,

A_N 의 부분집합의 개수는 8개이다.

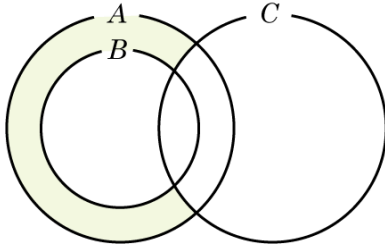
원소의 개수가 n 개인 부분집합의 개수 $= 2^n$

집합 A_N 의 원소의 개수는 3개이다.

N 의 약수의 개수가 3개가 되려면 N 은 소수의 제곱수이어야 한다.

따라서 가장 작은 소수인 2의 제곱수인 4가 N 의 최솟값이다.

14. 집합 $A = \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\}$, $B = \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\}$, $C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5개

해설

그림에 색칠된 부분은 $A - B - C$ 인 것을 알 수 있다.

$$A = \{x | x < 20, x \text{는 홀수인 자연수}\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\},$$

$$B = \{2x + 1 | x \text{은 5보다 작은 자연수}\}$$

$$= \{3, 5, 7, 9\},$$

$$C = \left\{x \mid \frac{x+3}{10} = n, n \text{은 자연수}\right\} = \{7, 17, 27, 37, 47, \dots\},$$

따라서 $(A - B) - C = \{1, 11, 13, 15, 19\}$ 이고 원소의 개수는 5 개이다.

15. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b - c$

해설

$n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때

$$n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$$

$$= n(P_3 \cup P_4)$$

$$= n(P_3) + n(P_4) - n(P_{12})$$

$$= a + b - c$$