

단원 종합 평가

1. 전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 에 대하여

$U = A \cup B$, $A = \{x \mid x \text{는 } 40 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 25 \text{의 약수}\}$ 일 때, $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$ 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 2개

해설

$$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

$$B = \{1, 5, 25\}$$

$$A \cap B = \{1, 5\}$$

2. 사과 24 개와 배 36 개를 될 수 있는대로 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 몇 명에게 나누어 줄 수 있는가? [배점 3, 중하]

- ① 10 명 ② 11 명 ③ 12 명
④ 13 명 ⑤ 14 명

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 36 \ 24} \\ 2 \overline{) 18 \ 12} \\ 3 \overline{) 9 \ 6} \\ 3 \ 2 \end{array} \quad 2 \times 2 \times 3 = 12$$

3. 빨간 색종이 63 장과 파란 색종이 45 장, 노란 색종이 36 장을 되도록 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 몇 명의 학생에게 나누어 줄 수 있는지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 9명

해설

세 수의 최대공약수를 구한다.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 63 \ 45 \ 36} \\ 3 \overline{) 21 \ 15 \ 12} \\ 7 \ 5 \ 4 \\ \hline \therefore 3 \times 3 = 9 \end{array}$$

4. 자연수 A 와 27 의 최대공약수는 9 이고, 최소공배수는 108일 때, 자연수 A 의 값을 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▷ 정답: 36

해설

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) A \ 27} \\ a \ 3 \end{array}$$

A 와 27 의 최소공배수가 108 이므로

$$9 \times a \times 3 = a \times 27 = 108$$

$$a = 108 \div 27 = 4$$

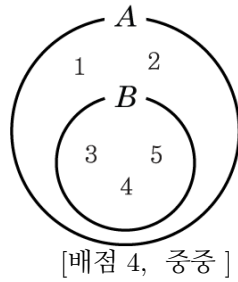
$$\therefore A = 4 \times 9 = 36$$

[별해] 두 자연수 A, B 의 최대공약수와 최소공배수의 곱은 두 자연수의 곱인 $A \times B$ 와 같다.

$$A \times 27 = 9 \times 108$$

$$\therefore A = 9 \times 108 \div 27 = 36$$

5. 두 집합 A, B 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 옳지 않은 것은?



- ① $5 \in A$
 ② $4 \in A$
 ③ $\{3, 4\} \in A$
 ④ $\{3\} \subset B$
 ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset A$

해설

- ③ $\{3, 4\} \subset A$

6. 50 명의 학생 중 한라산에 가 본 학생이 26 명, 한라산과 설악산에 모두 가 본 학생이 8 명, 한라산과 설악산에 모두 가 보지 못한 학생이 5 명일 때, 설악산에 가 본 학생 수를 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 27 명

해설

$$\begin{aligned} n(U) &= 50, n(A) = 26, n(A \cap B) = 8, n((A \cup B)^c) = 5 \text{ 이다.} \\ n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) = 50 - 5 = 45 \text{ 이다.} \\ n(B) &= n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B) = 45 - 26 + 8 = 27 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

7. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 4, 중중]

- ① $n(A \cap B) = 2$ ② $n(B^c) = 4$
 ③ $n(A - B) = 2$ ④ $n(B \cap A^c) = 3$
 ⑤ $n((A \cup B)^c) = 2$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 8\}$ 이므로
 ④ $n(B \cap A^c) = 2$ 이다.

8. 다음 중 420 의 약수가 아닌 것은? [배점 4, 중중]

- ① 6 ② $2^2 \times 3$
 ③ $2^2 \times 3^2$ ④ 2×7
 ⑤ $2 \times 3 \times 5 \times 7$

해설

$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ 이므로 ③이 약수가 아니다.

9. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1\}$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 30 보다 작은 자연수는 모두 몇 개인가? [배점 4, 중중]

- ① 6 개 ② 7 개 ③ 8 개
④ 9 개 ⑤ 10 개

해설

$$12 = 2^2 \times 3$$

12 와 $\square$ 의 공약수가 1, 즉 서로소이므로

$\square$ 는 30 미만의 자연수 중 2 와 3 의 배수가 아닌 수이므로

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29 의 10 개이다.

10. 두 집합 $A = \{-1, 0, 2a-5, 5\}$, $B = \{0, b+3, 3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{0, 3\}$ 이기 위한 a, b 의 값을 각각 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: $a = 4$

▶ 정답: $b = -1$

해설

$$A \cap B = \{0, 3\} \text{ 이므로 } 3 \in A$$

$$\text{따라서 } 2 \times a - 5 = 3, a = 4$$

$$A = \{-1, 0, 3, 5\}, A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$$

이므로 $2 \in B$,

$$b + 3 = 2, b = -1$$

$$\therefore a = 4, b = -1$$

11. 다음 집합 중에서 무한집합이 아닌 것을 모두 구하면? [배점 5, 중상]

① $\{x \mid x \text{는 자연수 부분이 1인 대분수}\}$

② $\{x \mid x \text{는 3보다 작은 3의 배수}\}$

③ $\{x \mid 2 < x < 5 \text{인 수}\}$

④ $\{x \mid 2 < x < 5 \text{인 정수}\}$

⑤ $\{x \mid x = 4n - 5, n \text{은 자연수}\}$

해설

① $\left\{1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \dots\right\} \Rightarrow$ 무한집합

② $\emptyset \Rightarrow$ 유한집합

③ 무한집합

④ $\{3, 4\} \Rightarrow$ 유한집합

⑤ $\{-1, 3, 7, 11, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

12. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $n-1$ 과, n 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때, n 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답:

▶ 정답: 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로

$$2^{n-2} = 64 = 2^6 \text{ 이다.}$$

$$\therefore n - 2 = 6, n = 8$$

13. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, B 에 대하여 집합 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \{1, 2, 9\}$ 를 만족하는 집합 B 는?
[배점 5, 중상]

- ① $\{2, 3, 4\}$ ② $\{3, 4, 5\}$
③ $\{3, 4, 5, 6\}$ ④ $\{3, 4, 5, 7\}$
⑤ $\{3, 4, 5, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 9\}$ 이므로 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$ 이다.
따라서 집합 $B = \{3, 4, 5, 9\}$ 이다.

14. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 집합 A 의 모든 부분집합의 원소의 합을 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :
▶ 정답 : 136

해설

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합은 $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$ 중에 원소 2, 3, 5, 7은 8 번씩 포함되므로 부분집합의 원소의 합은 $(2+3+5+7) \times 8 = 136$ 이다.

15. 7 로 나누면 2 가 남고 12 로 나누면 3 이 모자라는 수 중에서 가장 작은 세 자리 수를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :
▶ 정답 : 177

해설

7 과 12 의 공배수에 9 를 더한 수는 7 로 나누면 2 가 남고, 12 로 나누면 3 이 모자란 수이다.
7 과 12 의 최소공배수 : 84
 $84 \times 2 + 9 = 177$

16. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 8\}$ 에 대하여 $X - A = \emptyset$, $n(X \cap B) = 1$ 을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :
▶ 정답 : 12 개

해설

$X - A = \emptyset$ 이면 $X \subset A$
 $n(X \cap B) = 1$ 이므로 X 는 B 의 원소 하나를 포함하고 나머지 두 원소는 포함하지 않는 A 의 부분집합이다.
 X 가 2 를 포함하고 4, 8 을 포함하지 않은 경우 (집합 X 의 갯수) $= 2^{5-3} = 4$ (개), X 가 4 를 포함한 경우와 8 을 포함한 경우도 마찬가지이므로 (집합 X 의 갯수) $= 4 \times 3 = 12$ (개) 이다.

17. 1 학년 1 반 학생 45 명 중 수박을 좋아하는 학생이 35 명, 자두를 좋아하는 학생이 27 명이다. 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 : 27 명

▷ 정답 : 최솟값 : 17 명

해설

1 학년 1 반의 학생의 집합을 U , 수박을 좋아하는 학생의 집합을 A , 자두를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 두면, 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고,

$n(U) = 45, n(A) = 35, n(B) = 27$ 이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \leq 45$ 이므로,

$17 \leq n(A \cap B) \leq 27$

따라서 수박과 자두를 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값은 각각 27 명과 17 명

18. $2^3 < x < 2^4$ 인 수 중에서 이진법으로 나타냈을 때, 각 자리의 숫자의 합이 2 인 수는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3 개

해설

$2^3 < x < 2^4$ 인 수는 이진법으로 나타냈을 때 네 자리인 수이고

$1001_{(2)}$ 부터 $1111_{(2)}$ 까지의 수이다.

각 자리의 숫자의 합이 2 인 수는

$1001_{(2)}, 1010_{(2)}, 1100_{(2)}$ 인 3 개이다.

19. 100 과 서로소인 두 자리 자연수의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 36 개

해설

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

→ 100 과 서로소인 수는 2 의 배수가 아니고, 5 의 배수가 아니어야 한다.

$U = \{10, 11, \dots, 99\}$ 이고, 2 의 배수의 집합을 A_2 , 5 의 배수의 집합을 A_5 라 두면,

100 과 서로소인 두 자리 자연수의 개수 = $n(U) - n(A_2) - n(A_5) + n(A_2 \cap A_5) = 90 - 45 - 18 + 9 = 36$

20. 어느 지방의 마을에서는 5 일마다 한 번씩 장이 열린다. 어느 해의 첫 장이 열린 날은 1 월 2 일 토요일일 때, 그 다음 해의 첫 장이 열리는 날의 월, 일, 요일을 찾아라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1 월

▷ 정답 : 2 일

▷ 정답 : 일요일

해설

1 년은 365 일이고 365 가 5 의 배수이므로, 다음 해의 첫 장도 1 월 2 일에 열린다.

일요일은 7 일,

5 와 7 의 공배수 중 365 보다 작으면서 가장 가까운 수는 350 이므로,

1 월 2 일에서 350 일이 지난 시점에 또 토요일에 장이 열린다.

다음 해 1 월 2 일은 15 일 이후이므로 다음해 첫 장은 일요일이다.

∴ 1 월 2 일 일요일

21. 두 자연수 a, b 의 합은 216 이고 최대공약수는 18 이다. 이 때 ab 의 최댓값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11664

해설

$a = 18 \times n, b = 18 \times m$ 이라 둘 수 있다.

$$a + b = 18 \times (n + m) = 216$$

$$\rightarrow n + m = 12$$

따라서 (n, m) 이 될 수 있는 순서쌍은 $(1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4), (9, 3), (10, 2), (11, 1)$ 이다.

그런데 $ab = 18 \times 18 \times n \times m$ 이므로 ab 가 최댓값은 $n = m = 6$ 일 때이다.

$\therefore ab$ 의 최댓값 = 11664

22. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \{x | x < 10\}$, $B = \{x | x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\}$ 에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로

$$A = \{x | x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$B = \{x | x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\} = \{2, 4, 5, 7, 8\},$$

$$A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 6, 9\},$$

따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합이 A, B 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하여라.

$$(1) A \cap B = \emptyset$$

$$(2) A \cup B = U$$

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A \cap B = \emptyset$ 이고 $A \cup B = U$ 이면 $n(A) + n(B) = n(U) = 4$

$n(A) = 0, n(B) = 4$ 인 경우 : 1 개

$n(A) = 1, n(B) = 3$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 2, n(B) = 2$ 인 경우 : 6 개

$n(A) = 3, n(B) = 1$ 인 경우 : 4 개

$n(A) = 4, n(B) = 0$ 인 경우 : 1 개

따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ (개)

24. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $(A \cup B)^c = A \cap B^c = \emptyset$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

[배점 6, 상중]

- ① B 는 무한집합이다.
- ② B 는 무한집합이다.
- ③ A 가 무한집합이면 B 는 유한집합이다.
- ④ A 가 유한집합이면 B 는 유한집합이다.
- ⑤ A, B 모두 무한집합이 아니다.

해설

- ① A 가 유한집합이면, $(A \cup B)^c = \emptyset$ 가 되려면 $A \cup B = U$ 이므로 B 는 무한집합이어야 한다.
- ② A 가 무한집합이면, $A \cap B^c = \emptyset$ 가 되려면 $A - B = \emptyset$, $A \subset B$ 이므로 B 도 무한집합이어야 한다. 따라서 B 는 항상 무한집합이다.

25. n 진법으로 나타낸 수 $300_{(n)}$ 이 $43_{(n)}$ 의 4 배가 될 때, n 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned}
 300_{(n)} &= 4 \times 43_{(n)} \\
 \rightarrow 3n^2 &= 4 \times (4n + 3) \\
 \rightarrow 3n^2 - 16n &= 12 \\
 \text{위 식을 만족하는 } n &= 6 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$