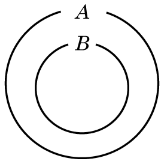
단원 종합 평가

1. 다음 벤 다이어그램과 관계가 없는 것은?



[배점 3, 하상]

① $A \cup B = A$ ② $A - B = \varnothing$

③ $A \cap B = B$ ④ $B \subset A$

⑤ $B - A = \varnothing$

해설

② $B - A = \varnothing$

2. 다음 중 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^4$ 의 소인수의 집합은?

[배점 3, 하상]

① $\{2, 3, 5\}$ ② $\{2, 3, 7\}$

③ $\{2, 3, 5, 7\}$ ④ $\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\}$

⑤ $\{2^3, 3^2, 5, 7^4\}$

해설

$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^4$ 이므로 소인수의 집합은 $\{2, 3, 5, 7\}$

3. 세 자연수 2, 3, 4 의 어느 것으로 나누어도 1 이 남는 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 하상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

구하는 수는 (2, 3, 4 의 공배수)+1 인 수 중 가장 작은 자연수이다.

2, 3, 4 의 최소공배수는 12 이다.

$\therefore\ 12 + 1 = 13$

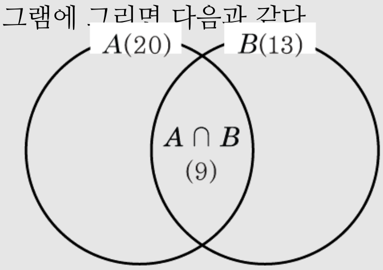
4. 우리 반에서 여름방학 중 바다로 여행을 간 학생이 20 명, 산으로 여행을 간 학생이 13 명이고 두 곳 모두 여행을 간 학생이 9 명이었다. 이때 두 곳 중 한 곳으로만 여행을 간 학생 수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 명

해설

바다로 여행을 간 학생의 집합을 A, 산으로 여행을 간 학생의 집합을 B 라고 할 때, 주어진 조건을 벤 다이어그램에 그리면 다음과 같다.



두 곳 중 한 곳으로만 여행을 간 학생 수는

$n(A - (A \cap B)) + n(B - (A \cap B))$ 이다.

$n(A - (A \cap B)) + n(B - (A \cap B))$

$= (20 - 9) + (13 - 9) = 11 + 4 = 15$

따라서 두 곳 중 한 곳으로만 여행을 간 학생 수는 15 명이다.

5. $\{1\} \subset A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합이면서 1을 포함하는 집합이므로 $\{2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$2^3 = 8$ (개)

6. $n(A) = 14,\ n(B) = 23,\ n(A \cap B) = 7$ 일 때, $n(B - A) - n(A - B)$ 의 값은? [배점 3, 중하]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

$n(A - B) = 14 - 7 = 7$

$n(B - A) = 23 - 7 = 16$

$\therefore\ n(B - A) - n(A - B) = 16 - 7 = 9$

7. 가로가 18cm, 세로가 12cm 인 직사각형 모양의 종이가 여러 장 있다. 이 종이들을 이어 붙여서 가장 작은 정사각형의 모양을 만들려고 한다. 직사각형 모양의 종이는 모두 몇 장이 필요한지 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 장

해설

$$\begin{array}{r|ll} 6 & 18 & 12 \\ \hline & 3 & 2 \end{array}$$

한 변의 길이가 36 cm 인 정사각형 모양을 만들어야 하므로 $3 \times 2 = 6$ (장) 이 필요하다.

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 15, n(A - B) = 5, n(A) = 8, n(B^c) = 8$ 일 때, $n(B - A)$ 는? [배점 4, 중중]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$n(A - B) = 5, n(A) = 8$ 이므로 $n(A \cap B) = 3$ 이다.

$n(B^c) = 8$ 이므로 $n(B) = n(U) - n(B^c) = 15 - 8 = 7$ 이다.

따라서 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 7 - 3 = 4$ 이다.

9. 두 집합 A, B 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
[배점 4, 중중]

① $A \subset B$ 이면 $n(A) < n(B)$ 이다.

② $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

③ $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

⑤ $n(A) \leq n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

해설

① $A \subset B$ 이면 $n(A) \leq n(B)$ 이다.
② : (반례) $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$
④ : (반례) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$
⑤ : (반례) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

10. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은? [배점 4, 중중]

① 3 ② 4 ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$2^4 \times 3 \times x = y^2$
가장 작은 $x = 3$,
$2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = y^2$
$y = 2^2 \times 3 = 12$
$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

11. 두 수 $2^3 \times 3^4 \times 7^c$, $2^a \times 3^b \times 7^4$ 의 최대공약수가 $2^2 \times 3^2 \times 7^2$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?
[배점 4, 중중]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

최대공약수가 $2^2 \times 3^2 \times 7^2$ 이고
$2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 2 의 지수가 3 이므로
$2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 2 의 지수가 2 이어야 한다.
같은 방식으로
$2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 3 의 지수가 4 이므로
$2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 3 의 지수가 2 이어야 한다.
또한,
$2^a \times 3^b \times 7^4$ 에서 7 의 지수가 4 이므로
$2^3 \times 3^4 \times 7^c$ 에서 7 의 지수가 2 이어야 한다.
따라서 $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$ 이다.

12. 20 의 약수의 개수와 $3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 a 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$20 = 2^2 \times 5$ 의 약수의 개수는
$(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ (개) 이다.
$3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수는
$(2 + 1) \times (a + 1) = 6$ (개)가 되어야 한다.
$\therefore\ a = 1$

13. 3, 5, 6 의 어느 것으로 나누어도 나머지가 2 인 수 중 세 자리 자연수는 모두 몇 개인가? [배점 4, 중중]

① 28 개 ② 29 개 ③ 30 개

④ 31 개 ⑤ 32 개

해설

구하는 수는 (3, 5, 6 의 공배수)+2 인 수이므로 3, 5, 6 의 최소공배수 30 이다.
30 의 배수 중 세 자리 자연수는 120, 150, $\cdots$, 990 이다.
따라서 구하는 수는 122, 152, $\cdots$, 992 이다.
$122 = 30 \times 4 + 2$, $992 = 30 \times 33 + 2$
$\therefore$ $33 - 3 = 30$ (개)

14. 두 집합 $A = \{x|x\text{는 7미만의 자연수}\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$에 대하여 $(B-A)\cup X = X$, $(A\cup B)\cap X = X$를 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 64 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 7, 8\}$
$(B - A) \cup X = X$ 이므로 $(B - A) \subset X$,
$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$,
$\{7, 8\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
따라서, 집합 X는 $A \cup B$의 부분집합 중 원소 7, 8 을 반드시 포함하는 집합이므로
$2^{8-2} = 2^6 = 64$(개) 이다.

15. 두 집합 $A = \{2, 2a, a+4\}$, $B = \{2, 10, b\}$ 에 대하여, $A = B$ 일 때, 가능한 a, b 의 값을 모두 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$, $b = 9$

▷ 정답 : $a = 6$, $b = 12$

해설

$A = B$ 이고 $10 \in B$ 이므로 $10 \in A$
$2a = 10$ 또는 $a + 4 = 10$
(i) $2a = 10$ 일 때,$a = 5$ 이므로
$A = \{2, 9, 10\}$, $B = \{2, 10, b\}$ $\therefore$ $b = 9$
(ii) $a + 4 = 10$ 일 때, $a = 6$ 이므로
$A = \{2, 10, 12\}$, $B = \{2, 10, b\}$ $\therefore$ $b = 12$
따라서 가능한 a, b 의 값은
$a = 5$, $b = 9$ 또는 $a = 6$, $b = 12$ 이다.

16. $n(\varnothing) + n(\{0\}) + n(\{\varnothing\})$ 을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$n(\varnothing) = 0$, $n(\{0\}) = 1$, $n(\{\varnothing\}) = 1$
$n(\varnothing) + n(\{0\}) + n(\{\varnothing\}) = 2$

17. 두 자연수의 곱이 972 이고, 최대공약수가 9 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 36

해설

두 자연수를 A, B 라 하고 최소공배수를 L 이라 하면 $972 = 9 \times L$ 이므로 $L = 108$

$$\begin{array}{r|ll} 9 & A & B \\ \hline & a & b \end{array}$$

$9 \times a \times b = 108$

$a \times b = 12$ (단, a, b 는 서로소)

$A = 9 \times a$, $B = 9 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면

$a = 12$, $b = 1$ 또는 $a = 4$, $b = 3$

(i) $a = 12$, $b = 1$ 일 때

$A - B = 9 \times 12 - 9 \times 1 = 99$

(ii) $a = 4$, $b = 3$ 일 때

$A - B = 9 \times 4 - 9 \times 3 = 9$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 27, 36 이다.

18. 두 집합

$A = \{x|x$를 삼진법으로 나타내었을 때 세 자리 수가 되는 십진수$\}$,

$B =\}x|x$를 오진법으로 나타내었을 때 두 자리 수가 되는 십진수$\}$ 에 대하여 $n(A \cup B)$ 를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

삼진법의 세 자리 수는 $100_{(3)}$ 부터 $222_{(3)}$ 까지이고, 십진수로는 9 부터 26 까지이다.

$\rightarrow A = \{9, 10, 11, \cdots, 26\}$

오진법의 두 자리 수는 $10_{(5)}$ 부터 $44_{(5)}$ 까지이고, 십진수로는 5 부터 24 까지이다.

$\rightarrow B = \{5, 6, 7, \cdots, 24\}$

$A \cap B = \{9, 10, 11, \cdots, 24\}$

$\therefore n(A \cap B) = 16$

19. $\underline{1}01\underline{1}01_{(2)}$ 에서 앞의 밑줄 친 1 이 나타내는 값은 뒤의 밑줄 친 1 이 나타내는 값의 몇 배인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 배

해설

이진법의 수는 자리가 하나씩 올라감에 따라 자리의 값이 2 배씩 커진다.

$\underline{1}\ \ 0\ \ 1\ \ \underline{1}\ \ 0\ \ 1$

$\times 2\ \times 2\ \times 2$

따라서 앞 수는 뒷 수의 $2 \times 2 \times 2 = 8$(배) 이다.

20. 1188 의 약수 중에서 11 과 서로소인 약수들의 총합을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 279

해설

$1188 = 11 \times 108 = 11 \times 4 \times 27 = 2^2 \times 3^3 \times 11$

11 과 서로소인 약수는 1188 의 약수 중 인수가 2 와 3 으로 이루어진 수이다.

$\rightarrow$ 즉, $2^2 \times 3^3$ 의 약수 중 1 을 제외한 수이다.

$\therefore$ 11 과 서로소인 약수들의 총합$= 2+3+4+6+9+12+18+27+36+54+108 = 279$