단원 종합 평가

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 48 \\ 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ & 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 □의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

2. $A = \{\varnothing,\ \{a\},\ b,\ \{c, d\},\ e\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [배점 3, 중하]

① $\{a\} \in A$

② $\varnothing \in A$

③ $\{c,\ d\} \subset A$

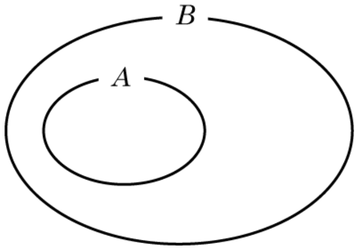
④ $n(A) = 5$

⑤ $\{b,\ e\} \subset A$

해설

③ $\{c,\ d\} \in A$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 6 의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 □의 배수$\}$ 에 대하여 집합 A 와 B 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, □ 안에 알맞은 자연수의 개수는?



[배점 3, 중하]

① 1개

② 2개

③ 3개

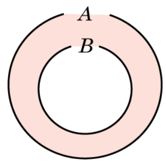
④ 4개

⑤ 5개

해설

$A \subset B$이므로 □의 수는 6의 약수이면 된다.
따라서 1, 2, 3, 6이므로 4개이다.

4. 두 집합 A, B에 대하여 아래 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 공집합이 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



[배점 3, 중하]

① $B \subset A$

② $B - A = \varnothing$

③ $2 \in A$ 이면 $2 \in B$ 이다.

④ $A \cap B = B$

⑤ $n(A) > n(B)$

해설

③ $A - B \neq \phi$ 이다. 예를 들면 $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ 이면 $2 \in A$ 이지만 $2 \notin B$ 이다.

5. 집합 $A = \{x \mid x$는 14 이하의 2의 배수$\}$ 중 원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 96 개

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
원소 2 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-1} = 64$ (개)
원소 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-1} = 64$ (개)
원소 2, 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-2} = 32$ (개)
원소 2 또는 4 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$64 + 64 - 32 = 96$ (개)

6. 집합 $A = \{x \mid x$는 10보다 작은 짝수$\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 8 을 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ 에서 원소 2, 8 를 제외한 $\{4, 6\}$ 의 부분집합은 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{4, 6\}$ 의 4 개가 있으므로, 원소 2, 8 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$ 이다. 이 중 원소의 개수가 4 개인 것은 $\{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 원소의 합은 $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ 이다.

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A)=25$, $n(B)=16$, $A\cap B=B$ 일 때, $n(A\cup B)+n(A-B)$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$A\cap B=B$ 이므로 $B\subset A$,

$n(A\cup B)=n(A)=25$,

$n(A-B)=n(A)-n(B)=25-16=9$

$\therefore n(A\cup B)+n(A-B)=25+9=34$

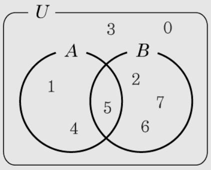
8. 전체집합 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A\cap B=\{5\}$, $(A\cup B)^c=\{0,\ 3\}$, $A-B=\{1,\ 4\}$ 일 때, $n(B-A)$ 의 값을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$B-A=\{2,\ 6,\ 7\}$ 이므로 $n(B-A)=3$

9. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7\}\}$, $B=\{0,\ \varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ 에 대하여 $n(A)-n(B)$ 를 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다. 따라서 $n(A)=4$, $n(B)=3$ 이고, $n(A)-n(B)=1$ 이다.

10. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면? [배점 5, 중상]

① 우리 반에서 똑똑한 학생의 모임

② 10 이하의 자연수 중에서 1 보다 작은 수의 모임

③ 대한민국에서 가장 큰 사람의 모임

④ 100 이하의 수 중에서 50 에 가까운 수의 모임

⑤ 세계에서 성공한 사람들의 모임

해설

주어진 조건에 알맞은 대상을 분명하게 구별할 수 있어야 하므로 ②, ③번만 집합이다.

11. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 15 이하의 소수$\}$, $B = \{x \mid x$는 5 미만의 소수$\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{2, 3\}$
집합 X 는 원소 2 와 3 을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 부분집합의 개수는
$2^{6-2} = 2^4 = 16$ (개)

12. 집합 $A = \{x \mid x$는 n보다 큰 3의 배수$\}$ 에 대하여 $9 \notin A$ 이고 $12 \in A$ 를 만족하는 자연수 n 을 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 11

해설

3 의 배수 $3, 6, 9, 12, \cdots$ 에서 9 는 포함하지 않고 12 는 포함하므로 $n = 9, 10, 11$ 이다.

13. 두 집합 $A = \{-1, 0, 2a-5, 5\}$,$B = \{0, b+3, 3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{0, 3\}$ 이기 위한 a, b 의 값을 각각 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 4$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$A \cap B = \{0, 3\}$ 이므로 $3 \in A$
따라서 $2 \times a - 5 = 3$, $a = 4$
$A = \{-1, 0, 3, 5\}$, $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$ 이므로 $2 \in B$,
$b + 3 = 2$, $b = -1$
$\therefore a = 4$, $b = -1$

14. 우리 반 학생 40 명 중에서 영어 학원을 다니는 학생은 25 명, 수학 학원을 다니는 학생은 21 명이라면, 두 과목 모두 학원을 다니는 사람 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 27 명

해설

문제에서 $A\cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 40 명이 $A\cup B$ 이다.
영어 학원을 다니는 학생을 집합 A 라고 하고, 수학 학원을 다니는 학생은 집합 B 라고 한다.
영어, 수학 학원을 모두 다니는 학생은 $A\cap B$ 가 된다.
$A\cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$40=25+21-x$
x 의 최솟값은 6 이다.
최댓값은 수학 학원을 다니는 학생이 영어 학원을 다니는 학생에 포함될 때 성립한다.
그러므로 x 의 최댓값은 21(명) 이다.
최솟값과 최댓값의 합은 27(명) 이다.

15. 다음 중 무한집합이 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면 ? (정답 3 개)

[배점 5, 상하]

① $\{x|x$는 짝수인 소수$\}$

② $\{x|x$는 1과 2사이의 유리수$\}$

③ $\left\{x|x\text{는 } \dfrac{4}{3x}=k,\ k\text{는 자연수}\right\}$

④ $\{2x+1|x,\ x$는 11보다 큰 소수$\}$

⑤ $\{[x]|1.5\le x\le 3.5,\ x$는 유리수$\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

해설

① $\{x|x$는 짝수인 소수$\}\rightarrow$ 짝수인 소수는 2 뿐이다.
② $\{x|x$는 1과 2사이의 유리수$\}\rightarrow$ 1 과 2 사이의 유리수는 무수히 많다.
③ $\left\{x|x\text{는 } \dfrac{4}{3x}=k,\ k\text{는 자연수}\right\}\rightarrow \dfrac{4}{3x}$ 가 자연수가 되는 x 의 값은 $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}$
④ $\{2x+1|x,\ x$는 11보다 큰 소수$\}\rightarrow$ 11 보다 큰 소수는 무수히 많다.
⑤ $\{[x]|1.5\le x\le 3.5,\ x$는 유리수$\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)
$\rightarrow$ $[x]$ 가 될 수 있는 수는 $1,2,3$ 뿐이다.

16. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 집합 $A_n = \{x|x\text{는 } n\text{의 배수}\}$ 이라고 정의한다. 다음 중 옳지 않은 것은 ? [배점 5, 상하]

① $A_4 \subset A_2$

② $A_6 \subset A_2$

③ $A_2 \cap A_5 = A_{10}$

④ $A_3 \cap A_4 \subset A_{24}$

⑤ $A_2 - A_3 = A_2 - A_6$

해설

① $A_4 \subset A_2 \rightarrow$ 모든 4 의 배수는 2 의 배수이므로 옳다.
② $A_6 \subset A_2 \rightarrow$ 모든 6 의 배수는 2 의 배수이므로 옳다.
③ $A_2 \cap A_5 = A_{10} \rightarrow$ 2 와 5 의 공배수의 집합은 10 의 배수의 집합과 같으므로 옳다.
④ $A_3 \cap A_4 \subset A_{24} \rightarrow A_3 \cap A_4 = A_{12}$ 이므로 $A_{24} \subset A_{12}$ 따라서 틀렸다.
⑤ $A_2 - A_3 = A_2 - A_6 \rightarrow$ 2 의 배수에서 3 의 배수를 제외한 것은 6 의 배수를 제외한 것과 같으므로 옳다.

17. $n(A) = 3$ 인 집합 A 에 대하여 집합 $P = \{X|X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 255 개

해설

집합 P 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 가지므로
$n(P) = 2^3 = 8$,
따라서 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수는 $2^8 - 1 = 255$ (개)

18. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 A, B에 대하여 $(A \cap B)^C = \{a,\ b,\ c\}$, $(A - B) \cap (A \cup B^C) = \{c\}$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$U = \{a, b, c, d, e\}$ 이고 $(A \cap B)^c = \{a, b, c\}$ 이므로
$A \cap B = \{b, d\}$,

$$\begin{aligned} & (A - B) \cap (A \cup B^c) \\ = & (A - B) \cap (A^c \cap B)^c \\ = & (A - B) - (B - A) \\ = & A - B \\ = & \{c\} \end{aligned}$$

$\therefore n(A - B) = 1$

19. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \{x|x<10\}$, $B = \{x|x^2-1=3n,\ x \in A, n \in N\}$ 에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로
$A = \{x|x<10\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,
$B = \{x|x^2-1=3n,\ x \in A, n \in N\} = \{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$,
$A \cap B^c = A - B = \{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$,
따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

20. 어느 학급에서 '자주 먹는 고기의 종류' 를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31 명, 돼지고기를 선택한 학생은 27 명, 소고기를 선택한 학생은 23 명이었다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14 명은 닭고기를, 15 명은 돼지고기를, 9 명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7 명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 56 명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,
닭고기만을 선택한 학생 수는 $n(A) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 14$,
돼지고기만을 선택한 학생 수는 $n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 15$,
소고기만을 선택한 학생 수는 $n(C) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 9$,
위의 세 식을 모두 더하면,
$n(A) + n(B) + n(C) - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 3n(A \cap B \cap C) = 38$,
$n(A) = 31, n(B) = 27, n(C) = 23, n(A \cap B \cap C) = 7$ 이므로
$31 + 27 + 23 - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 21 = 38$
$\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 32$
모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,
$n(U) = n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$
$= 31 + 27 + 23 - 32 + 7 = 56$