

단원 종합 평가

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라. [배점 3, 중하]

▶ 답:

▶ 정답: 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

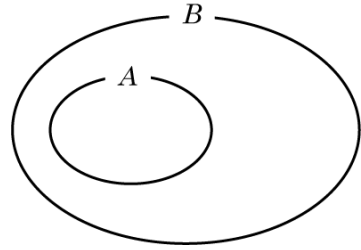
2. $A = \{\emptyset, \{a\}, b, \{c, d\}, e\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? [배점 3, 중하]

- ① $\{a\} \in A$ ② $\emptyset \in A$
 ③ $\{c, d\} \subset A$ ④ $n(A) = 5$
 ⑤ $\{b, e\} \subset A$

해설

③ $\{c, d\} \in A$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 집합 A와 B의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, $\square$ 안에 알맞은 자연수의 개수는?



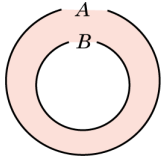
[배점 3, 중하]

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개
 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A \subset B$ 이므로 $\square$ 의 수는 6의 약수이면 된다. 따라서 1, 2, 3, 6이므로 4개이다.

4. 두 집합 A, B 에 대하여 아래 벤 다이어그램의 색칠한 부분이 공집합이 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



[배점 3, 중하]

- ① $B \subset A$
- ② $B - A = \emptyset$
- ③ $2 \in A$ 이면 $2 \in B$ 이다.
- ④ $A \cap B = B$
- ⑤ $n(A) > n(B)$

해설

③ $A - B \neq \emptyset$ 이다. 예를 들면 $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ 이면 $2 \in A$ 이지만 $2 \notin B$ 이다.

5. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 14 \text{ 이하의 } 2 \text{의 배수}\}$ 중 원소 2 또는 4를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 96 개

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

원소 2를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 4를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-1} = 64 \text{ (개)}$$

원소 2, 4를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$2^{7-2} = 32 \text{ (개)}$$

원소 2 또는 4를 포함하는 부분집합의 개수 :

$$64 + 64 - 32 = 96 \text{ (개)}$$

6. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 짝수}\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 8을 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 부분집합의 원소의 합을 구하여라. [배점 4, 중중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ 에서 원소 2, 8를 제외한 $\{4, 6\}$ 의 부분집합은 $\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{4, 6\}$ 의 4개가 있으므로, 원소 2, 8을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 6, 8\}, \{2, 4, 6, 8\}$ 이다. 이 중 원소의 개수가 4개인 것은 $\{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 원소의 합은 $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ 이다.

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 25$, $n(B) = 16$, $A \cap B = B$ 일 때, $n(A \cup B) + n(A - B)$ 의 값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 34

해설

$A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$,
 $n(A \cup B) = n(A) = 25$,
 $n(A - B) = n(A) - n(B) = 25 - 16 = 9$
 $\therefore n(A \cup B) + n(A - B) = 25 + 9 = 34$

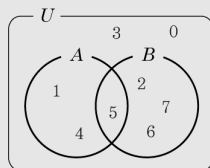
8. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \{5\}$, $(A \cup B)^c = \{0, 3\}$, $A - B = \{1, 4\}$ 일 때, $n(B - A)$ 의 값을 구하여라.
[배점 4, 중중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$B - A = \{2, 6, 7\}$ 이므로 $n(B - A) = 3$

9. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.
[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

10. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면? [배점 5, 중상]

- ① 우리 반에서 똑똑한 학생의 모임
- ② 10 이하의 자연수 중에서 1 보다 작은 수의 모임
- ③ 대한민국에서 가장 큰 사람의 모임
- ④ 100 이하의 수 중에서 50에 가까운 수의 모임
- ⑤ 세계에서 성공한 사람들의 모임

해설

주어진 조건에 알맞은 대상을 분명하게 구별할 수 있어야 하므로 ②, ③번만 집합이다.

11. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 소수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{2, 3\}$
 집합 X 는 원소 2와 3을 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로 부분집합의 개수는
 $2^{6-2} = 2^4 = 16$ (개)

12. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } n \text{보다 큰 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $9 \notin A$ 이고 $12 \in A$ 를 만족하는 자연수 n 을 모두 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 11

해설

3의 배수 3, 6, 9, 12, ...에서 9는 포함하지 않고 12는 포함하므로 $n = 9, 10, 11$ 이다.

13. 두 집합 $A = \{-1, 0, 2a-5, 5\}$, $B = \{0, b+3, 3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{0, 3\}$ 이기 위한 a, b 의 값을 각각 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 4$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$A \cap B = \{0, 3\}$ 이므로 $3 \in A$
 따라서 $2 \times a - 5 = 3$, $a = 4$
 $A = \{-1, 0, 3, 5\}$, $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 5\}$
 이므로 $2 \in B$,
 $b + 3 = 2$, $b = -1$
 $\therefore a = 4$, $b = -1$

14. 우리 반 학생 40 명 중에서 영어 학원을 다니는 학생은 25 명, 수학 학원을 다니는 학생은 21 명이라면, 두 과목 모두 학원을 다니는 사람 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▶ 정답 : 27 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 40 명이 $A \cup B$ 이다.

영어 학원을 다니는 학생을 집합 A 라고 하고, 수학 학원을 다니는 학생은 집합 B 라고 한다.

영어, 수학 학원을 모두 다니는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$40 = 25 + 21 - x$$

x 의 최솟값은 6 이다.

최댓값은 수학 학원을 다니는 학생이 영어 학원을 다니는 학생에 포함될 때 성립한다.

그러므로 x 의 최댓값은 21(명)이다.

최솟값과 최댓값의 합은 27(명)이다.

15. 다음 중 무한집합이 아닌 것을 모두 고르면 ? (정답 3 개) [배점 5, 상하]

① $\{x|x \text{는 짝수인 소수}\}$

② $\{x|x \text{는 } 1 \text{과 } 2 \text{사이의 유리수}\}$

③ $\left\{x|x \text{는 } \frac{4}{3x} = k, k \text{는 자연수}\right\}$

④ $\{2x+1|x, x \text{는 } 11 \text{보다 큰 소수}\}$

⑤ $\{[x]|1.5 \leq x \leq 3.5, x \text{는 유리수}\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

해설

① $\{x|x \text{는 짝수인 소수}\} \rightarrow$ 짝수인 소수는 2 뿐이다.

② $\{x|x \text{는 } 1 \text{과 } 2 \text{사이의 유리수}\} \rightarrow 1 \text{ 과 } 2 \text{ 사이의 유리수는 무수히 많다.}$

③ $\left\{x|x \text{는 } \frac{4}{3x} = k, k \text{는 자연수}\right\} \rightarrow \frac{4}{3x}$ 가 자연수가 되는 x 의 값은 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

④ $\{2x+1|x, x \text{는 } 11 \text{보다 큰 소수}\} \rightarrow 11 \text{ 보다 큰 소수는 무수히 많다.}$

⑤ $\{[x]|1.5 \leq x \leq 3.5, x \text{는 유리수}\}$ (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

$\rightarrow [x]$ 가 될 수 있는 수는 1, 2, 3 뿐이다.

16. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합인 집합 $A_n = \{x | x \text{는 } n \text{의 배수}\}$ 이라고 정의한다. 다음 중 옳지 않은 것은 ? [배점 5, 상하]

- ① $A_4 \subset A_2$
 ② $A_6 \subset A_2$
 ③ $A_2 \cap A_5 = A_{10}$
 ④ $A_3 \cap A_4 \subset A_{24}$
 ⑤ $A_2 - A_3 = A_2 - A_6$

해설

- ① $A_4 \subset A_2 \rightarrow$ 모든 4의 배수는 2의 배수이므로 옳다.
 ② $A_6 \subset A_2 \rightarrow$ 모든 6의 배수는 2의 배수이므로 옳다.
 ③ $A_2 \cap A_5 = A_{10} \rightarrow$ 2와 5의 공배수의 집합은 10의 배수의 집합과 같으므로 옳다.
 ④ $A_3 \cap A_4 \subset A_{24} \rightarrow A_3 \cap A_4 = A_{12}$ 이므로 $A_{24} \subset A_{12}$ 따라서 틀렸다.
 ⑤ $A_2 - A_3 = A_2 - A_6 \rightarrow$ 2의 배수에서 3의 배수를 제외한 것은 6의 배수를 제외한 것과 같으므로 옳다.

17. $n(A) = 3$ 인 집합 A 에 대하여 집합 $P = \{X | X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 255 개

해설

집합 P 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 가지므로

$$n(P) = 2^3 = 8,$$

따라서 집합 P 의 부분집합 중 공집합을 뺀 나머지의 개수는 $2^3 - 1 = 7$ (개)

18. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cap B)^c = \{a, b, c\}$, $(A - B) \cap (A \cup B)^c = \{c\}$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$U = \{a, b, c, d, e\}$ 이고 $(A \cap B)^c = \{a, b, c\}$ 이므로

$$A \cap B = \{b, d\},$$

$$\begin{aligned} & (A - B) \cap (A \cup B)^c \\ &= (A - B) \cap (A^c \cap B)^c \\ &= (A - B) - (B - A) \\ &= A - B \\ &= \{c\} \\ \therefore n(A - B) &= 1 \end{aligned}$$

19. 자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A = \{x|x < 10\}$, $B = \{x|x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\}$ 에 대하여 $n(A \cap B^c)$ 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

집합 A, B 는 자연수 전체 집합의 부분집합이므로
 $A = \{x|x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $B = \{x|x^2 - 1 = 3n, x \in A, n \in N\} = \{2, 4, 5, 7, 8\}$,
 $A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 6, 9\}$,
따라서, $n(A \cap B^c) = 4$

20. 어느 학급에서 ‘자주 먹는 고기의 종류’를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31명, 돼지고기를 선택한 학생은 27명, 소고기를 선택한 학생은 23명이었다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14명은 닭고기를, 15명은 돼지고기를, 9명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 56명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,

닭고기만을 선택한 학생 수는 $n(A) - n(A \cap B) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 14$,

돼지고기만을 선택한 학생 수는 $n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 15$,

소고기만을 선택한 학생 수는 $n(C) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) = 9$,

위의 세 식을 모두 더하면,

$n(A) + n(B) + n(C) - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 3n(A \cap B \cap C) = 38$,

$n(A) = 31, n(B) = 27, n(C) = 23, n(A \cap B \cap C) = 7$ 이므로

$31 + 27 + 23 - 2(n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + 21 = 38$

$\rightarrow n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 32$

모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,

$n(U) = n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 31 + 27 + 23 - 32 + 7 = 56$