문제 풀이 과제

1. $48\underline{1}5$ 에서 밑줄 친 1 이 실제로 나타내는 값을 x, $10\underline{1}001_{(2)}$ 에서 밑줄 친 1 이 실제로 나타내는 값을 y 라고 할 때, $x-y$ 의 값은? [배점 5, 중상]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$48\underline{1}5$ 의 1 은 10 을 나타내고, $10\underline{1}001_{(2)}$ 의 1 은 $2^3=8$ 을 나타낸다. 따라서 $x=10,\ y=8$ 이고, $10-8=2$ 이다.

2. 자연수 $N=2^{15}\times5^{11}$ 을 십진법으로 나타내었을 때, 몇 자리의 수가 되는지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$2^{15}\times5^{11}=2^4\times10^{11}$ 이고, $2^4=16$ 이므로 두 자리의 수이다. 따라서 N 은 $2+11=13$ 자리의 수이다.

3. $2^{17}\times5^{20}$ 은 n 자리의 자연수이다. 이 때 n 의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$2^{17}\times5^{20}=5^3\times10^{17}$ 이고, $5^3=125$ 이므로 세 자리의 수이다. 따라서 n 은 $3+17=20$ 이다.

4. 무게가 1g, 2g, 2^2g, 2^3g, 2^4g, $\cdots$, 2^{10}g 인 추를 가능한 한 적게 사용하여 무게가 480g 인 물건을 측정할 때, 필요한 추는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 개

해설

$480=111100000_{(2)}$ 이므로

$\therefore$ 2^8g, 2^7g, 2^6g, 2^5g 각각 1 개씩 총 4 개

5. 이진법으로 나타낸 수 $x_{(2)}$ 와 $111111_{(2)}$ 사이에는 십진법으로 나타낸 수가 6 개 있다. 이 때, 이진법으로 나타낸 수 $x_{(2)}$ 에서 x 를 구하여라. (단, $x_{(2)}>111111_{(2)}$) [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $1000110_{(2)}$

해설

$111111_{(2)}=63$ 이고, $x_{(2)}$ 가 큰 수이므로

사이의 수는 64, 65, 66, 67, 68, 69 의 6 개이다.

$\therefore$ $x_{(2)}=70=1000110_{(2)}$

6. 두 자리의 자연수 A, B 에 대해서 $A = 7 \times a$, $B = 7 \times b$ 일 때, A, B 의 최대공약수는 $111_{(2)}$ 이고, 최소공배수는 $7 \times 10101_{(2)}$ 이다. A+B 를 이진법으로 나타내어라. (단, $A > B$) [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : $1000110_{(2)}$

해설

$111_{(2)} = 4 + 2 + 1 = 7$

$A = 7 \times a$, $B = 7 \times b$ 에서 최대공약수가 7 이므로

a, b 는 서로소이다.

따라서 A, B 의 최소공배수는

$7 \times a \times b = 7 \times 10101_{(2)} = 7 \times 21$

$(a,\ b) = (3,\ 7)$ 또는 $(7,\ 3)$

그런데 조건에서 $A > B$ 이라 했으므로

$a = 7,\ b = 3$ 이다.

따라서 $A + B = 49 + 21 = 70 = 2^6 + 2^2 + 2 = 1000110_{(2)}$ 이다.

7. $11101_{(2)} \div 6$ 의 몫과 나머지를 이진법의 수인 $a_{(2)}$, $b_{(2)}$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은? [배점 5, 중상]

① 101 ② 110 ③ 111

④ 201 ⑤ 202

해설

$11101_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 29$

$29 = 6 \times 4 + 5$ 이므로

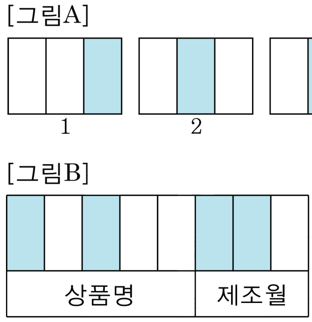
몫 $4 = 100_{(2)}$ $\therefore\ a = 100$

나머지 $5 = 101_{(2)}$ $\therefore\ b = 101$

$a + b = 201$

8. [그림 A]는 이진법의 원리를 이용하여 1, 2, 3, $\cdots$ 을 나타낸 바코드이다.

[그림 B]는 위와 같은 방법으로 바코드를 만든 것이다. 상품명과 제조 월을 바르게 찾은 것은?



20 : 소시지 21 :사탕 22 :우유

23 : 초콜렛 24 : 아이스크림

[배점 5, 중상]

① 우유, 6 월 ② 아이스크림, 4 월

③ 소시지, 6 월 ④ 사탕 , 5 월

⑤ 아이스크림, 6 월

해설

상품명 : $10110_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 22$

$\therefore$ 우유

제조월 : $110_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 6$

$\therefore$ 6 월

9. 다음은 이진법을 나타내는 그림이다.

1_2 : ●, 10_2 : ●○, 11_2 : ●●, $\cdots$

이때, 다음 그림이 나타내는 수를 십진법으로 나타내어라.

●●●○○ [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

그림이 나타내는 수는 $11100_{(2)}$ 이다.

$11100_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 28$ 이다.

10. $2^{13} \times 3^4 \times 5^{10}$ 을 십진법으로 나타내었을 때 끝자리의 연속된 0의 개수는 a개, 이진법으로 나타내었을 때 끝자리의 연속된 0의 개수는 b개이다. $a+b$의 값을 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$$\begin{aligned} 2^{13} \times 3^4 \times 5^{10} &= 2^3 \times 3^4 \times 2^{10} \times 5^{10} \\ &= 2^3 \times 3^4 \times 10^{10} \end{aligned}$$

이므로 $a = 10$ 이다.

$2^{13} \times 3^4 \times 5^{10} = 3^4 \times 5^{10} \times 2^{13}$

이므로 $b = 13$ 이다.

$\therefore 10 + 13 = 23$

11. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $1001_{(2)}$ 은 소수가 아니다.

㉡ $111_{(2)}$ 은 3의 배수이다.

㉢ $11_{(2)}$ 보다 1 큰 수는 $100_{(2)}$ 이다.

㉣ $100_{(2)}$ 보다 1 작은 수는 99이다.

㉤ $100_{(2)}$ 과 $110_{(2)}$ 은 서로소이다.

[배점 5, 중상]

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개

④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $1001_{(2)} = 9$는 소수가 아니다.

㉡ $111_{(2)} = 7$은 3 의 배수가 아니다.

㉢ $11_{(2)} = 3$보다 1 큰 수는 $4 = 100_{(2)}$ 이다.

㉣ $100_{(2)} = 4$보다 1 작은 수는 $3 = 11_{(2)}$ 이다.

㉤ $100_{(2)} = 4$와 $110_{(2)} = 6$ 은 서로소가 아니다.

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉢의 2 개이다.

12. 다음 중 밑줄 친 숫자 1이 실제로 나타내는 값이 큰 순서대로 기호를 나열하여라.

㉠ $1\underline{1}11_{(2)}$	㉡ $100\underline{1}0_{(2)}$
㉢ $1\underline{1}0111_{(2)}$	㉣ $1\underline{1}110_{(2)}$

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢, ㉣, ㉠, ㉡

해설

㉠ $1\underline{1}11_{(2)} = 2^2$

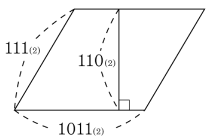
㉡ $100\underline{1}0_{(2)} = 2^1$

㉢ $1\underline{1}0111_{(2)} = 2^4$

㉣ $1\underline{1}110_{(2)} = 2^3$

$\therefore$ ㉢, ㉣, ㉠, ㉡

13. 다음 평행사변형의 넓이를 십진법으로 나타내어라.



[배점 5, 중상]

① 32cm^2 ② 33cm^2 ③ 40cm^2

④ 66cm^2 ⑤ 72cm^2

해설

(밑변) $= 1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 8 + 2 + 1 = 11(\text{cm})$

(높이) $= 110_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 4 + 2 = 6(cm)$

$\therefore$ (넓이) $= 11 \times 6 = 66(\text{cm}^2)$

14. 세 자리의 이진법으로 나타낸 수 중에서 5 보다 큰 수를 모두 고르면? (정답 2개) [배점 5, 중상]

① $100_{(2)}$ ② $101_{(2)}$ ③ $110_{(2)}$

④ 7 ⑤ 9

해설

가장 큰 세 자리의 이진법 수는$111_{(2)}$ 이다.

$111_{(2)} = 7$ 이므로 5보다 큰 세 자리 이진법 수는 6, 7 이다.

① $100_{(2)} = 1 \times 2^2 = 4$

② $101_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 5$

③ $110_{(2)} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 6$

15. $2^4 < x < 2^5$ 인 자연수 x 를 이진법의 수로 나타내면 n 자리 수가 된다. n 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

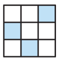
▷ 정답 : 5

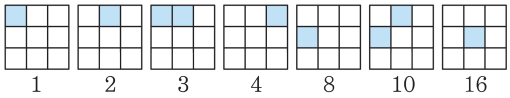
해설

$2^4 = 10000_{(2)}$, $2^5 = 100000_{(2)}$ 이므로

$10000_{(2)} < x < 100000_{(2)}$

따라서 x 은 5 자리 수이므로 $n = 5$ 이다.

16. 자연수 1, 2, 3, 4, 8, 10, 16 을 다음과 같이 나타낼 때, 이 나타내는 수는?



[배점 5, 상하]

① 76 ② 88 ③ 100

④ 140 ⑤ 160

해설

$1 = 1_{(2)},\ 2 = 10_{(2)},\ 3 = 11_{(2)},\ \cdots$ 이므로

0	0	1
1	0	0
0	1	

$\rightarrow 10001100_{(2)}$

$10001100_{(2)} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 128 + 8 + 4 = 140$

17. 자연수 a, b 에 대하여 $11011_{(2)} + a$, $10110_{(2)} - b$ 가 모두 3 의 배수일 때, $a + b$ 의 최솟값은?

[배점 5, 상하]

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$11011_{(2)} + a = 27 + a$

$\therefore 27 + a = 30,\ a = 3$

$10110_{(2)} - b = 22 - b$

$\therefore 22 - b = 21,\ b = 1$

$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$

18. $10^5 + 10^3$ 은 십진법으로 타나내면 m자리 수이고, $2^4 + 2$ 은 이진법으로 나타내면 n자리 수이다. $m + n$의 값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$10^5 + 10^3 = 1 \times 10^5 + 1 \times 10^3 = 101000$

$\therefore m = 6$

$2^4 + 2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2 = 10010_{(2)}$

$\therefore n = 5$

$\therefore 6 + 5 = 11$

19. $110010_{(2)}$ 를 십진법으로 나타낸 것은?

[배점 5, 상하]

① 26 ② 48 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

해설

$110010_{(2)} = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2$

$= 32 + 16 + 2 = 50$

20. 20150 을 십진법의 전개식으로 나타낸 것은?

[배점 5, 상하]

① $2\times10^2+1\times10^2+5\times1$

② $2\times10^3+1\times10^2+5\times1$

③ $2\times10^3+1\times10^2+5\times10$

④ $2\times10^4+1\times10^3+5\times10$

⑤ $2\times10^4+1\times10^2+5\times10$

해설

$20150=20000+100+50=2\times10^4+1\times10^2+5\times10$

21. 자연수 n 에 대하여 n^2 을 오진법으로 나타내었을 때, $0,1,2,3,4$ 중 일의 자리의 숫자가 될 수 없는 것을 모두 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 3

해설

자연수 1 부터 제곱의 값을 써 보면,
$1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,$
$196,225,\cdots$
모든 제곱값의 일의 자리 수는 $1,4,5,6,9,0$ 임을 알 수 있다.
따라서 일의 자리의 숫자가 될 수 없는 수는 $2,3$ 이다.

22. n 진법으로 나타낸 수의 식 $2a4b6_{(n)}-b6c8_{(n)}=1666c_{(n)}$ 이 성립할 때, $a+b+c+n$ 을 구하여라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2a4b6_{(n)}-b6c8_{(n)}=1666c_{(n)}$
$\rightarrow 1666c_{(n)}+b6c8_{(n)}=2a4b6_{(n)}$
$\rightarrow$ 셋째 자리를 보면 둘째 자리에서 1 이 올라오지 않았다면 $6+6=n+4$, $n=8$ 이므로, 식이 성립할 수 없다. 따라서 둘째 자리에서 1 이 올라와서 $1+6+6=n+4$, $n=9$
$\rightarrow 1666c_{(9)}+b6c8_{(9)}=2a4b6_{(9)}$, 첫째 자리를 비교하면 $c+8=6+9$, $c=7$
$\rightarrow 16667_{(9)}+b678_{(9)}=2a4b6_{(9)}$, 둘째 자리를 보면 $1+6+7=9+b$, $b=5$
$\rightarrow 16667_{(9)}+5678_{(9)}=2a456_{(9)}$, 넷째 자리를 보면 $1+6+5=9+a$, $a=3$
$\therefore a+b+c+n=3+5+7+9=24$

23. 구진법으로 나타내었을 때 두 자리 구진수인 자연수를 오진법으로 나타내었더니 숫자의 순서가 바뀌었다. 이러한 수를 모두 찾아 십진법으로 나타내어라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

▷ 정답 : 22

해설

두 자리 구진수를 $ab_{(9)}$ 라고 두면, $ab_{(9)} = ba_{(5)}$

$\rightarrow 9a + b = 5b + a$

$\rightarrow 2a = b$

a, b 는 항상 1 보다 크고 5 보다 작으므로 위 조건을 만족하는 값은 $12_{(9)}, 24_{(9)}$ 이다.

$\therefore 12_{(9)} = 11,\ 24_{(9)} = 22$

24. 두 자리의 오진수 $xy_{(5)}$ 와 두 자리의 칠진수 $yx_{(7)}$ 의 합을 십진수로 나타냈을 때 40 이다. 이것을 만족하는 $xy_{(5)}$ 를 십진수로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$xy_{(5)} = 5 \times x + y$, $yx_{(7)} = 7 \times y + x$

$\rightarrow 6x + 8y = 40$

$\rightarrow 3x + 4y = 20$

x, y 는 항상 1 보다 크고 5 보다 작으므로 위 조건을 만족시키려면 $x = 2$, $y = 4$ 이어야 한다.

$\therefore 24_{(5)} = 2 \times 5 + 1 \times 4 = 14$

25. $xy1_{(6)}$ 을 십진법의 수로 나타낼 때, 4 진법의 전개식으로 잘못 써서 계산하였더니 원래 수보다 64 만큼 작아졌다. 이 때, $xy1_{(6)}$ 을 십진법의 수로 나타내어라.

[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 121

해설

$xy1_{(6)} = x \times 6^2 + y \times 6 + 1$

$xy1_{(6)}$ 를 4 진법의 전개식으로 잘못 계산했다면,

$xy1_{(6)} = x \times 4^2 + y \times 4 + 1$

$\rightarrow x \times 6^2 + y \times 6 + 1 = x \times 4^2 + y \times 4 + 1 + 64$

$\rightarrow 20x + 2y = 64$

$\rightarrow x, y$ 는 6 진법의 수이고 6 보다 항상 작으므로,

$x = 3$, $y = 2$

$\therefore 321_{(6)} = 3 \times 6^2 + 2 \times 6 + 1 \times 1 = 121$

26. 5 자리의 오진수 $abc32_{(5)}$ 에 오진수 X 를 더하면 25 로 나누어 떨어진다. 오진수 X 중 가장 작은 수를 십진법으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$abc32_{(5)} = a \times 5^4 + b \times 5^3 + c \times 5^2 + 3 \times 5 + 2$

25 로 나누어 떨어지기 위해서는 5^1 의 자리와 1 의 자리가 0 이어야 한다.

$\therefore 13_{(5)} = 8$

27. 숫자 1 과 0 을 다음과 같은 규칙으로 나열하였다.
$11011100111110001111110000011111100000\cdots$
이때, 왼쪽에서부터 109 번째 숫자부터 113 번째 숫자로 다섯 자리의 이진법의 수를 만든다. 만들어진 이진법의 수를 십진법으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$11011100111110001111110000011111100000\cdots$ 는 $110, 11100, 1111000, 111110000,$ 으로 나눌 수 있다.
각 묶음의 수의 개수는 $3, 5, 7, 9$ 로 증가한다.
$3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 99$ 이므로,
100 번째 수부터 120 번째 수까지 21 개의 수는 111111111110000000000 이다.
따라서 109 번째 숫자부터 113 번째 숫자로 다섯 자리의 이진법의 수는 11000 이다.
$\therefore 11000_{(2)} = 24$

28. 숫자 0 과 1 을 다음과 같은 규칙으로 나열하였다. $1001110000111110000001111111\cdots$ 왼쪽에서부터 101 번째 숫자부터 106 번째 숫자로 2 진수를 만들 때, 그 수를 십진수로 나타내어라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$1001110000111110000001111111\cdots$ 는 $1, 00, 111, 0000, 11111, 000000, 1111111, \cdots$ 의 묶음으로 나눌 수 있다.
각 묶음이 1 씩 커진다.
1 부터 13 까지의 합$= \dfrac{13 \times 14}{2} = 91$ 이므로,
92 번째 수부터 105 번째 수까지 14 개의 수가 연속으로 0 이 된다.
106 번째 수는 1 이다. 따라서 만들 수 있는 이진수는 $1_{(2)}$ 이고, 십진수로 나타내어도 1 이다.

29. $1\text{g}, 2\text{g}, 4\text{g}, 8\text{g}, 16\text{g}, 32\text{g}$ 의 저울추 1 개씩과 저울로 1g 부터 63g 까지의 자연수 무게를 가진 물체를 측정할 수 있다. 만약 4g 짜리 추를 잃어버리면 잴 수 없는 무게의 종류가 몇 가지인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 32 가지

해설

추가 모두 2 진법의 수이므로, n 개의 추로 $2^n - 1$ 개의 무게를 측정할 수 있다.
추 6 개로 잴 수 있는 무게의 수$= 63g$,
추 5 개로 잴 수 있는 무게의 수$= 31g$,
$\therefore$ (4g 짜리 추를 잃어버리면 잴 수 없는 무게의 종류)$= 32$ (가지)

30. 여섯 자리의 이진법의 수 ○○○$011_{(2)}$ 에 십진법의 수 n 을 더하면 8 의 배수가 된다. n 의 최솟값을 구하여라. (단, $n > 0$) [배점 5, 상하]

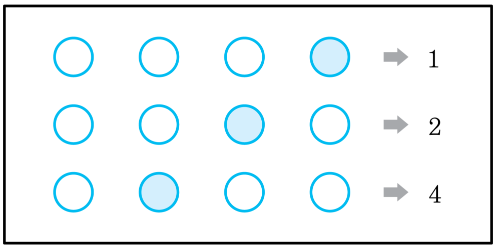
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

이진법의 수는 넷째 자리부터는 항상 8 의 배수가 된다.
따라서 ○○○$011_{(2)}$ 에 n 을 더해서 8 의 배수가 된다면 $011_{(2)}$ 에 n 을 더해도 8 의 배수가 된다.
$011_{(2)} = 3$
$\therefore n = 5$

31. 4 명의 학생이 손전등을 하나씩 손에 쥐고 가장 오른쪽 학생은 2 분에 한 번씩 켰다 끄고, 그 왼쪽 학생은 3 분, 그 왼쪽 학생은 4 분, $\cdots$, 이렇게 손전등을 켰다가 끈다. 손전등의 신호가 나타내는 것이 다음과 같을 때, 다 같이 켠 후 15 분 후에 신호가 나타내는 수는 무엇인가?



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

15 분 후에 켜지는 손전등은 15 의 약수 분마다 한 번씩 켜지는 손전등이므로 3, 5 분마다 켜는 손전등이 켜진다.
따라서 $= 1010_{(2)} = 10$ 이다.

32. 이진법으로 나타낼 수 있는 $1ab100_{(2)}$ 이 여섯 자리의 수일 때, a, b 에 들어갈 수 있는 수는 모두 몇 가지인지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 4 가지

해설

이진법으로 나타내는 수이므로, 0, 1 만 들어갈 수 있다.
$100100_{(2)}$, $101100_{(2)}$, $110100_{(2)}$, $111100_{(2)}$,
$\therefore$ 총 4 가지

33. 이진법으로 나타낼 수 있는 $1abc0_{(2)}$ 이 다섯 자리의 수일 때, a, b, c 에 들어갈 수 있는 수는 모두 몇 가지인가? [배점 6, 상중]

① 8 가지 ② 6 가지 ③ 4 가지
④ 2 가지 ⑤ 10 가지

해설

이진법으로 나타내는 수이므로, 0, 1 만 들어갈 수 있다.
$10000_{(2)}$, $11000_{(2)}$, $10100_{(2)}$, $10010_{(2)}$,
$11100_{(2)}$, $11010_{(2)}$, $10110_{(2)}$, $11110_{(2)}$
$\therefore$ 총 8 가지

34. $1\text{g}, 3\text{g}, 9\text{g}, 27\text{g}, 81\text{g}, 243\text{g}$ 짜리 추와 양팔저울을 이용하여 무게를 재려고 한다. 잴 수 있는 모든 무게의 가짓수를 A, $81\text{g}, 243\text{g}$ 짜리 추가 동시에 사용되는 무게의 가짓수를 B 라고 할 때, $A - B$ 를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 324

해설

$1\text{g}, 3\text{g}, 9\text{g}, 27\text{g}, 81\text{g}, 243\text{g}$ 의 추가 있으므로,
위의 저울은 1g 부터 $111111_{(3)} = 364(\text{g})$ 까지 무게를 잴 수 있으므로,
$A = 364$ 가지이다.
$81\text{g}, 243\text{g}$ 짜리 추가 동시에 사용되는 무게의 가짓수는 $1\text{g}, 3\text{g}, 9\text{g}, 27\text{g}$ 의 추로 잴 수 있는 무게의 가짓수와 같고, $1\text{g}, 3\text{g}, 9\text{g}, 27\text{g}$ 의 추로 잴 수 있는 무게의 가짓수는 1g 부터 $1111_{(3)} = 40\text{g}$ 까지 총 40 가지의 무게를 잴 수 있다.
$\therefore A - B = 324$

35. 양팔저울과 몇 개의 추로 364g 까지의 자연수 무게를 측정하려고 한다. 필요한 최소의 추의 개수는 몇 개인지 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

양팔저울은 오른쪽 저울에 올리는 경우, 왼쪽 저울에 올리는 경우, 올리지 않는 경우로 총 세 가지 경우가 가능하므로, 양팔저울을 이용한 무게 측정은 3 진법으로 나타낼 수 있다.
3 진법의 추는 $1\text{g}, 3\text{g}, 9\text{g}, 27\text{g}, 81\text{g}, 243\text{g}, 729\text{g}$, 등이고, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$ 이므로,
필요한 최소의 추는 6 개이다.

36. n 진법으로 나타낸 수 $300_{(n)}$ 은 $13_{(n)} + 43_{(n)}$ 의 3 배라고 한다. 이때, n 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$300_{(n)} = 3 \times (13_{(n)} + 43_{(n)}) = 3 \times (1 \times n + 3 \times 1 + 4 \times n + 3 \times 1)$
$\rightarrow 3n^2 = 3 \times (5n + 6)$
$\rightarrow 3n^2 - 15n = 18$
위 식을 만족하는 $n = 6$ 이다.

37. n 진법으로 나타낸 수 $300_{(n)}$ 이 $43_{(n)}$ 의 4 배가 될 때, n 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$300_{(n)} = 4 \times 43_{(n)}$
$\rightarrow 3n^2 = 4 \times (4n + 3)$
$\rightarrow 3n^2 - 16n = 12$
위 식을 만족하는 $n = 6$ 이다.

38. $\frac{cdb_{(4)}}{2} = aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2$ 일 때, $abcd_{(4)}$ 를 십진법의 수로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

$aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2 \rightarrow a = c - 2$,

a, b, c, d 는 모두 4 보다 작으므로 $c = 3$, $a = 1$,

$\frac{3db_{(4)}}{2} = 1b1_{(4)} = 1b3_{(4)} - 2$,

$\rightarrow 3db_{(4)} = 2 \times 1b1_(4)$,

$\rightarrow 7b - 4d = 14$, $b = 2$, $d = 0$,

$\therefore abcd_{(4)} = 1230_(4) = 108$

39. $acd_{(4)} - 1 = aba_{(4)} = abc_{(4)} + 1$ 일 때, $dac_{(4)}$ 를 십진법으로 나타내어라. (단, a, b, c, d 는 서로 다른 숫자) [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$acd_{(4)} - 1 = aba_{(4)} \rightarrow c - 1 = b,\ d = 0,\ a = 3$

$aba_{(4)} = abc_{(4)} + 1 \rightarrow c + 1 = 3,\ c = 2,\ b = 1$

$\therefore dac_{(4)} = 32_{(4)} = 14$

40. 0 에서 4 까지 쓰인 구슬 5 개가 든 주머니에서 처음에 세 개의 구슬을 꺼내서 꺼낸 차례대로 세 자리 수의 오진수를 만들고, 다시 구슬을 주머니에 집어넣는다. 두 번째로 세 개의 구슬을 꺼내서 오진법의 수를 만들었을 때, 이 두 수를 5 로 나누면 모두 나머지가 1 이 되는 확률을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{25}$

해설

세 구슬을 꺼내서 만든 오진수를 $abc_{(5)}$ 라 두면,

$abc_{(5)} = a \times 5^2 + b \times 5 + c \rightarrow a \times 5^2 + b \times 5 + c$ 에서 $a \times 5^2 + b \times 5$ 부분은 항상 5 로 나누어지므로, 나머지는 c 가 된다.

첫 번째, 두 번째에 1 이 나오지 않고 세 번째에 1 이 나올 확률은, $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

두 번 연속으로 같은 상황이 되어야 하므로, $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

41. 0 부터 5 까지의 눈이 있는 정육면체 주사위를 세 번 던져, 나온 눈의 수를 순서대로 각각 x, y, z 라고 할 때, 6 진법의 수 $xyz_{(6)}$ 를 만들 수 있다. 이 수를 36 으로 나눈 나머지가 24 의 약수가 될 확률을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{9}$

해설

$xyz_{(6)} = x \times 6^2 + y \times 6 + z$, 24 의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ 이다.

$x \times 6^2 + y \times 6 + z$ 에서 $x \times 6^2$ 부분은 항상 36 으로 나누어 떨어지므로, 나머지는 $y \times 6 + z$ 이다.

$\rightarrow 6y + z$ 가 24 의 약수가 될 확률을 구해 보면

$\rightarrow 6y + z = 1$, $(y, z) = (0, 1)$

$\rightarrow 6y + z = 2$, $(y, z) = (0, 2)$

$\rightarrow 6y + z = 3$, $(y, z) = (0, 3)$

$\rightarrow 6y + z = 4$, $(y, z) = (0, 4)$

$\rightarrow 6y + z = 6$, $(y, z) = (1, 0)$

$\rightarrow 6y + z = 8$, $(y, z) = (1, 2)$

$\rightarrow 6y + z = 12$, $(y, z) = (2, 0)$

$\rightarrow 6y + z = 24$, $(y, z) = (4, 0)$

따라서 y, z 가 0 에서 5 까지 나올 경우는 36 이므로

$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

42. 1 부터 n 까지의 모든 자연수의 곱을 $n!$ 으로 정의한다. $n!$ 을 이진법의 수로 나타냈을 때 일의 자리부터 연속되는 0 의 갯수가 15 개인 n 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$n!$ 를 2 의 지수로 묶어 보면,

$n!$

$= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 9 \times (2 \times 5) \times 11$

$\times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times 15 \times 2^4 \times 17$

$= m \times 2^{15}$

$\rightarrow$ 17! 까지 묶었을 때 2 의 지수가 15 가 된다..

따라서 일의 자리부터 연속되는 0 의 갯수가 15 개인 n 중에서 가장 작은 수는 17 이다.

43. $n!$ 은 1 부터 n 까지 모든 자연수의 곱을 말한다. 18! 을 이진법의 수로 나타내었을 때, 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

18! 를 2 의 지수로 묶어보면,

18!

$= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 9 \times (2 \times 5) \times 11$

$\times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times 15 \times 2^4 \times 17 \times (2 \times 9)$

$= m \times 2^{16}$

$\rightarrow m$ 은 홀수이므로, 17 번째 자리의 수는 반드시 1 이다.

따라서 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수는 16 개이다.

44. 자연수 n 을 이진법의 수로 바꾸었을 때, 각 자리 숫자의 합을 $S(n)$ 이라고 정의한다.
전체집합 $U = \{n|10 \leq n < 100\}$ 의 부분집합 $A = \{a|S(a) \geq 7,\ a \in U\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 0 개

해설

$S(a) \geq 7 \rightarrow 1$ 의 개수가 7 개 이상인 이진수
1 의 개수가 7 개인 이진수 중 가장 작은 수는 $1111111_{(2)} = 255$ 이므로,
100 보다 작은 수 중 1 의 개수가 7 개 이상인 이진수는 없다.
$\therefore n(A) = 0$

45. 자연수 n 을 이진법의 수로 나타내었을 때, 각 자리 숫자의 합을 $s(n)$ 이라고 정의한다.
전체집합 $U = \{2n|50 \leq n < 500,\ n$은 자연수$\}$ 의 부분집합 $A = \{x|s(x) = 2, x \in U\}$ 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 15 개

해설

$U = \{2n|50 \leq n < 500,\ n$은 자연수$\} \rightarrow 100 \leq 2n < 1000 \rightarrow$ 집합 U 는 세 자리 자연수의 집합
$s(x) = 2 \rightarrow 1$ 이 2 개 밖에 없는 이진수
$100 = 1100100_{(2)}$, $999 = 1111100111_{(2)}$ 이므로,
$1100100_{(2)} \leq x \leq 1111100111(2)$ 중 1 의 개수가 2 개뿐인 이진수이다.
→ 일곱 자리 이진수 중 1 이 두 개인 수가 모두 $1100100_{(2)}$ 보다 작다.
→ 여덟 자리 이진수 중 1 이 두 개인 수 : 7 개
→ 아홉 자리 이진수 중 1 이 두 개인 수는 8 개이고 모두 $1111100111_{(2)}$ 보다 작다.
$\therefore n(A) = 15$

46. $2^5 \leq N < 2^6$ 을 만족시키는 자연수 N 을 이진법의 수로 나타낼 때, 이진법으로 몇 자리의 수가 되는가? [배점 6, 상상]

① 6 자리 ② 5 자리 ③ 4 자리
④ 3 자리 ⑤ 2 자리

해설

$2^5 = 100000_{(2)}$, $2^6 = 1000000_{(2)}$ 이므로
$100000_{(2)} \leq N < 1000000_{(2)}$
따라서 N 은 6 자리 수