

문제 풀이 과제

1. $2^3 < x < 2^4$ 인 수 중에서 이진법으로 나타냈을 때, 각 자리의 숫자의 합이 2 인 수는 몇 개인지 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 3 개

해설

$2^3 < x < 2^4$ 인 수는 이진법으로 나타냈을 때 네 자리인 수이고

$1001_{(2)}$ 부터 $1111_{(2)}$ 까지의 수이다.

각 자리의 숫자의 합이 2 인 수는

$1001_{(2)}$, $1010_{(2)}$, $1100_{(2)}$ 인 3 개이다.

2. 자연수 a, b 에 대하여 $11011_{(2)} + a$, $10110_{(2)} - b$ 가 모두 3 의 배수일 때, $a + b$ 의 최솟값은?
[배점 5, 상하]

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$$11011_{(2)} + a = 27 + a$$

$$\therefore 27 + a = 30, a = 3$$

$$10110_{(2)} - b = 22 - b$$

$$\therefore 22 - b = 21, b = 1$$

$$\therefore a + b = 3 + 1 = 4$$

3. $11_{(2)} < A \leq 10011_{(2)}$ 을 만족하는 자연수 A 중 소수는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

$$11_{(2)} = 3, 10011_{(2)} = 19$$

$3 < A \leq 19$ 인 소수는 5, 7, 11, 13, 17, 19 로 6 개이다.

4. $1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$ 를 이진법으로 나타낸 것은?
[배점 5, 상하]

① $1011_{(2)}$ ② $1110_{(2)}$ ③ $10101_{(2)}$
④ $10110_{(2)}$ ⑤ $10010_{(2)}$

해설

생략된 자리에는 0 을 써 준다.

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$$

$$= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

$$= 10110_{(2)}$$

5. $11010_{(2)}$ 를 이진법의 전개식으로 옳게 나타낸 것은?
[배점 5, 상하]

- ① $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2$
 ② $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2$
 ③ $1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2$
 ④ $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1$
 ⑤ $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1$

해설

$$11010_{(2)} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2$$

6. 자연수 n 에 대하여 n^2 을 오진법으로 나타내었을 때, 0, 1, 2, 3, 4 중 일의 자리의 숫자가 될 수 없는 것을 모두 구하여라.
[배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: 2

▶ 정답: 3

해설

자연수 1 부터 제곱의 값을 써 보면,
 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169,
 196, 225, ...
 모든 제곱값의 일의 자리 수는 1, 4, 5, 6, 9, 0 임을
 알 수 있다.
 따라서 일의 자리의 숫자가 될 수 없는 수는 2, 3
 이다.

7. 두 자리의 오진수 $xy_{(5)}$ 와 두 자리의 칠진수 $yx_{(7)}$ 의 합을 십진수로 나타냈을 때 40 이다. 이것을 만족하는 $xy_{(5)}$ 를 십진수로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 14

해설

$$xy_{(5)} = 5 \times x + y, \quad yx_{(7)} = 7 \times y + x$$

$$\rightarrow 6x + 8y = 40$$

$$\rightarrow 3x + 4y = 20$$

x, y 는 항상 1 보다 크고 5 보다 작으므로 위 조건
 을 만족시키려면 $x = 2, y = 4$ 이어야 한다.

$$\therefore 24_{(5)} = 2 \times 5 + 1 \times 4 = 14$$

8. 두 집합

$A = \{x | x \text{를 삼진법으로 나타내었을 때 세 자리
 수가 되는 십진수}\},$

$B = \{x | x \text{를 오진법으로 나타내었을 때 두 자리
 수가 되는 십진수}\}$ 에 대하여 $n(A \cup B)$ 를 구하여라.
 [배점 5, 상하]

▶ 답:

▶ 정답: 16

해설

삼진법의 세 자리 수는 $100_{(3)}$ 부터 $222_{(3)}$ 까지이
 고, 십진수로는 9 부터 26 까지이다.

$$\rightarrow A = \{9, 10, 11, \dots, 26\}$$

오진법의 두 자리 수는 $10_{(5)}$ 부터 $44_{(5)}$ 까지이고,
 십진수로는 5 부터 24 까지이다.

$$\rightarrow B = \{5, 6, 7, \dots, 24\}$$

$$A \cap B = \{9, 10, 11, \dots, 24\}$$

$$\therefore n(A \cap B) = 16$$

9. 여섯 자리의 이진법의 수 $\bigcirc\bigcirc\bigcirc011_{(2)}$ 에 십진법의 수 n 을 더하면 8 의 배수가 된다. n 의 최솟값을 구하여라. (단, $n > 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▶ 정답 : 5

해설

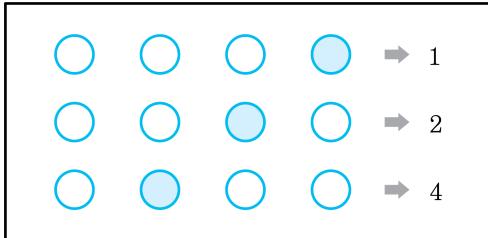
이진법의 수는 넷째 자리부터는 항상 8 의 배수가 된다.

따라서 $\bigcirc\bigcirc\bigcirc011_{(2)}$ 에 n 을 더해서 8 의 배수가 된다면 $011_{(2)}$ 에 n 을 더해도 8 의 배수가 된다.

$$011_{(2)} = 3$$

$$\therefore n = 5$$

10. 4명의 학생이 손전등을 하나씩 손에 쥐고 가장 오른쪽 학생은 2분에 한 번씩 켜다 끄고, 그 왼쪽 학생은 3분, 그 왼쪽 학생은 4분, ... , 이렇게 손전등을 켜다가 끈다. 손전등의 신호가 나타내는 것이 다음과 같을 때, 다 같이 켜 후 15분 후에 신호가 나타내는 수는 무엇인가?



[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 10

해설

15분 후에 켜지는 손전등은 15의 약수 분마다 한 번씩 켜지는 손전등이므로 3, 5분마다 켜는 손전등이 켜진다.

따라서 $= 1010_{(2)} = 10$ 이다.

11. 이진법으로 나타낼 수 있는 $1abc0_{(2)}$ 이 다섯 자리의 수일 때, a, b, c 에 들어갈 수 있는 수는 모두 몇 가지인가? [배점 6, 상중]

① 8 가지

② 6 가지

③ 4 가지

④ 2 가지

⑤ 10 가지

해설

이진법으로 나타내는 수이므로, 0, 1 만 들어갈 수 있다.

$$10000_{(2)}, 11000_{(2)}, 10100_{(2)}, 10010_{(2)},$$

$$11100_{(2)}, 11010_{(2)}, 10110_{(2)}, 11110_{(2)}$$

$\therefore$ 총 8 가지

12. 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g 짜리 추와 양팔저울을 이용하여 무게를 재려고 한다. 잴 수 있는 모든 무게의 가짓수를 A , 81g, 243g 짜리 추가 동시에 사용되는 무게의 가짓수를 B 라고 할 때, $A - B$ 를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 정답 : 324

해설

1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g 의 추가 있으므로,

위의 저울은 1g 부터 $111111_{(3)} = 364(g)$ 까지 무게를 잴 수 있으므로,

$A = 364$ 가지이다.

81g, 243g 짜리 추가 동시에 사용되는 무게의 가짓수는 1g, 3g, 9g, 27g 의 추로 잴 수 있는 무게의 가짓수와 같고, 1g, 3g, 9g, 27g 의 추로 잴 수 있는 무게의 가짓수는 1g 부터 $1111_{(3)} = 40g$ 까지 총 40 가지의 무게를 잴 수 있다.

$$\therefore A - B = 324$$

13. n 진법으로 나타낸 수 $300_{(n)}$ 은 $13_{(n)} + 43_{(n)}$ 의 3 배라고 한다. 이때, n 의 값을 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned} 300_{(n)} &= 3 \times (13_{(n)} + 43_{(n)}) = 3 \times (1 \times n + 3 \times 1 + 4 \times n + 3 \times 1) \\ &\rightarrow 3n^2 = 3 \times (5n + 6) \\ &\rightarrow 3n^2 - 15n = 18 \\ &\text{위 식을 만족하는 } n = 6 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

14. $\frac{cdb_{(4)}}{2} = aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2$ 일 때, $abcd_{(4)}$ 를 십진법의 수로 나타내어라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

$$\begin{aligned} aba_{(4)} &= abc_{(4)} - 2 \rightarrow a = c - 2, \\ a, b, c, d \text{ 는 모두 4 보다 작으므로 } c &= 3, a = 1, \\ \frac{3db_{(4)}}{2} &= 1b1_{(4)} = 1b3_{(4)} - 2, \\ &\rightarrow 3db_{(4)} = 2 \times 1b1_{(4)}, \\ &\rightarrow 7b - 4d = 14, b = 2, d = 0, \\ &\therefore abcd_{(4)} = 1230_{(4)} = 108 \end{aligned}$$

15. $acd_{(4)} - 1 = aba_{(4)} = abc_{(4)} + 1$ 일 때, $dac_{(4)}$ 를 십진법으로 나타내어라. (단, a, b, c, d 는 서로 다른 숫자)

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} acd_{(4)} - 1 &= aba_{(4)} \rightarrow c - 1 = b, d = 0, a = 3 \\ aba_{(4)} &= abc_{(4)} + 1 \rightarrow c + 1 = 3, c = 2, b = 1 \\ \therefore dac_{(4)} &= 32_{(4)} = 14 \end{aligned}$$

16. 1 부터 n 까지의 모든 자연수의 곱을 $n!$ 으로 정의한다. $n!$ 을 이진법의 수로 나타냈을 때 일의 자리부터 연속되는 0 의 갯수가 15 개인 n 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$$\begin{aligned} n! \text{ 를 2 의 지수로 묶어 보면,} \\ n! &= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 9 \times (2 \times 5) \times 11 \\ &\times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times 15 \times 2^4 \times 17 \\ &= m \times 2^{15} \\ &\rightarrow 17! \text{ 까지 묶었을 때 2 의 지수가 15 가 된다.} \\ &\text{따라서 일의 자리부터 연속되는 0 의 갯수가 15} \\ &\text{개인 } n \text{ 중에서 가장 작은 수는 17 이다.} \end{aligned}$$

17. $n!$ 은 1 부터 n 까지 모든 자연수의 곱을 말한다. $18!$ 을 이진법의 수로 나타내었을 때, 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 16 개

해설

$18!$ 를 2 의 지수로 묶어보면,

$18!$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 9 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times 15 \times 2^4 \times 17 \times (2 \times 9) = m \times 2^{16}$$

→ m 은 홀수이므로, 17 번째 자리의 수는 반드시 1 이다.

따라서 일의 자리에서 왼쪽으로 연속되는 0 의 갯수는 16 개이다.

18. 자연수 n 을 이진법의 수로 바꾸었을 때, 각 자리 숫자의 합을 $S(n)$ 이라고 정의한다.

전체집합 $U = \{n | 10 \leq n < 100\}$ 의 부분집합 $A = \{a | S(a) \geq 7, a \in U\}$ 일 때, 집합 A 의 원소의 개수를 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답:

▶ 정답: 0 개

해설

$S(a) \geq 7 \rightarrow 1$ 의 개수가 7 개 이상인 이진수

1 의 개수가 7 개인 이진수 중 가장 작은 수는 $1111111_{(2)} = 255$ 이므로,

100 보다 작은 수 중 1 의 개수가 7 개 이상인 이진수는 없다.

$$\therefore n(A) = 0$$

19. $2^5 \leq N < 2^6$ 을 만족시키는 자연수 N 을 이진법의 수로 나타낼 때, 이진법으로 몇 자리의 수가 되는가? [배점 6, 상상]

① 6 자리

② 5 자리

③ 4 자리

④ 3 자리

⑤ 2 자리

해설

$$2^5 = 100000_{(2)}, 2^6 = 1000000_{(2)} \text{ 이므로}$$

$$100000_{(2)} \leq N < 1000000_{(2)}$$

따라서 N 은 6 자리 수