문제 풀이 과제

1. 504 의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다. 이때, $x-y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수) [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3$, $y = 1$ 이어야 한다. ($\because$ $x > y$)
$\therefore$ $x - y = 3 - 2 = 2$

2. 24 에 가능한 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱해야 하는 자연수는? [배점 5, 중상]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$24 = 2^3 \times 3$이므로 제곱수가 되려면
2×3, $2^3 \times 3$, $2^3 \times 3^3$, $\cdots$ 을 곱해야 한다.
따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

3. 가로의 길이가 72cm , 세로의 길이가 96cm , 높이가 120cm 인 직육면체를 남김없이 잘라 똑같은 크기의 정육면체로 나누려고 한다. 되도록 적은 개수의 정육면체를 만들 때, 만들 수 있는 정육면체는 몇 개인지 구하여라. [배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 60 개

해설

72, 96, 120 의 최대공약수는 24이므로 만들 수 있는 정육면체의 모서리의 길이는 (24의 약수)cm 이다. 정육면체의 한 모서리의 길이가 길수록 정육면체의 개수는 적으므로 한 모서리의 길이는 24(cm) 이다.
$\therefore$ (정육면체의 갯수)
$= (72 \div 24) \times (96 \div 24) \times (120 \div 24)$
$= 3 \times 4 \times 5 = 60$(개)

4. 운동장에서 진수는 달리기를 하고 성찬이는 자전거를 타고 있다. 한 바퀴 도는 데 진수는 1분 30초 걸리고 성찬이는 54초가 걸린다. 출발점에서 두 사람이 오전 10시에 동시에 출발했을 대, 그 다음 출발점에서 만나는 시각은? [배점 5, 중상]

① 10시 2분 10초
② 10시 2분 50초
③ 10시 3분 20초
④ 10시 3분 40초
⑤ 10시 4분 30초

해설

90, 54의 최소공배수는 270이므로 진수와 성찬이는 4분 30초마다 출발점에서 만난다.
따라서 10시에 동시에 출발했으므로 다음 동시에 출발하는 시각은 10시 4분 30초 이다.

5. 세 자연수 $54,\ 72,\ A$ 의 최대공약수가 6 , 최소공배수가 216 일 때, 가장 큰 자연수 A 의 값은?

[배점 5, 중상]

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

$54 = 2 \times 3^3,\ 72 = 2^3 \times 3^2,\ A$ 에서
최대공약수는 $6 = 2 \times 3$,
최소공배수는 $216 = 2^3 \times 3^3$ 이므로
A 는 2×3 을 소인수로 가져야 하고, 또한 3 의 지수는 1 이어야 하므로
A 의 값이 될 수 있는 것은 $6,\ 12,\ 24$ 이다.
따라서, 가장 큰 자연수 A 의 값은 24 이다.

6. 세 자연수 $84,\ 126,\ A$ 의 최대공약수가 6 , 최소공배수가 1260 일 때, 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

[배점 5, 중상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$84 = 2^2 \times 3 \times 7,\ 126 = 2 \times 3^2 \times 7,\ A$ 에서
최대공약수는 $6 = 2 \times 3$,
최소공배수는 $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로
A 는 2×3 과 5 를 인수로 반드시 가져야 한다.
따라서, 가장 작은 자연수 $A = 2 \times 3 \times 5 = 30$ 이다.

7. 세 수 $3 \times 5^2,\ c^3 \times 3^a \times 5^2,\ 2 \times 3 \times 5^b \times 7$ 의 최대공약수가 $d \times 5$ 이고, 최소공배수가 $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ 일 때, $\frac{d}{c} - \frac{b}{a}$ 의 값을 구하면?

[배점 5, 중상]

① 0 ② 1 ③ 5 ④ 9 ⑤ 12

해설

최대공약수가 $d \times 5$,
최소공배수가 $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ 이므로
$a = 2,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3$
$\therefore \frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

8. $2^4 \times a \times 5^2$ 의 약수가 45 개가 되기 위한 가장 작은 a 의 값은?

[배점 5, 상하]

① 2 ② 3 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$2^4 \times a \times 5^2$ 의 약수의 개수는
$(4+1) \times (a$의 지수 $+1) \times (2+1) = 45$ 으로 계산된다. $(a$의 지수$) + 1 = 3$이 되어야 한다.
그러므로 $9 = 3^2$ 이다.

9. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은? [배점 5, 상하]

① 9 ② 12 ③ 36

④ 54 ⑤ 100

해설

$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$
가장 작은 $a = 2 \times 3 = 6$
$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$
$\therefore A = 12$

10. 5 자리의 오진수 $abc32_{(5)}$ 에 오진수 X 를 더하면 25 로 나누어 떨어진다. 오진수 X 중 가장 작은 수를 십진법으로 나타내어라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$abc32_{(5)} = a \times 5^4 + b \times 5^3 + c \times 5^2 + 3 \times 5 + 2$
25 로 나누어 떨어지기 위해서는 5^1 의 자리와 1 의 자리가 0 이어야 한다.
$\therefore 13_{(5)} = 8$

11. 이진수 중에서 1 을 세 번 사용하는 수를 작은 순서대로 나열하면,
$111_{(2)}, 1011_{(2)}, 1101_{(2)}, 1110_{(2)}, 10011_{(2)}, 10101_{(2)}, 10110_{(2)} \cdots$
이 된다.
이때, 55 번째 나오는 이진수를 십진수로 나타내어라.
[배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 208

해설

$111_{(2)}, 1011_{(2)}, 1101_{(2)}, 1110_{(2)}, 10011_{(2)}$, $10101_{(2)}, 10110_{(2)} \cdots$ 에서 볼 수 있듯이,
1 을 3 번만 사용한 세 자리 수 이진수 : 1 개,
1 을 3 번만 사용한 네 자리 수 이진수 : 3 개,
1 을 3 번만 사용한 다섯 자리 수 이진수 : 6 개,
1 을 3 번만 사용한 여섯 자리 수 이진수 : 10 개,
1 을 3 번만 사용한 일곱 자리 수 이진수 : 15 개,
1 을 3 번만 사용한 여덟 자리 수 이진수 : 21 개이므로,
55 번째 나오는 이진수는 1 을 3 번만 사용한 여덟 자리 수 이진수 중 두 번째로 큰 수이다.
$\therefore 11010000_{(2)} = 208$

12. 여섯 자리의 이진법의 수 ○○○$011_{(2)}$ 에 십진법의 수 n 을 더하면 8 의 배수가 된다. n 의 최솟값을 구하여라. (단, $n > 0$) [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

이진법의 수는 넷째 자리부터는 항상 8 의 배수가 된다.
따라서 ○○○$011_{(2)}$ 에 n 을 더해서 8 의 배수가 된다면 $011_{(2)}$ 에 n 을 더해도 8 의 배수가 된다.
$011_{(2)} = 3$
$\therefore n = 5$

13. 자연수 a, b, c 에 대하여 $750a = 180b = c^2$ 이 성립할 때, c 의 최솟값을 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 150

해설

$750a = 2 \times 3 \times 5^3 \times a$, $180b = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times b$,
위 두 식이 가장 작은 c^2 의 형태가 되려면,
$a = 2 \times 3 \times 5$, $b = 5^3$ 이어야 한다.
따라서,
$c^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$
$\therefore c = 150$

14. 1 부터 어떤 자연수 n 까지의 곱을 $n!$ 이라고 한다. 25! 을 계산하였을 때, 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수를 구하여라. [배점 5, 상하]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수는 10 의 거듭제곱의 개수이다.
$10 = 2 \times 5$ 이므로 25! 에서 2×5 의 인수를 찾아보면,
$2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 15 \times 16 \times 18 \times 20 \times 22 \times 24 \times 25 = (2 \times 5)^6 \times a$
$\therefore$ 25! 에서 일의 자리부터 연속되어 나타나는 0 의 개수= 6 개

15. 양팔저울과 몇 개의 추로 364g 까지의 자연수 무게를 측정하려고 한다. 필요한 최소의 추의 개수는 몇 개인지 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 6 개

해설

양팔저울은 오른쪽 저울에 올리는 경우, 왼쪽 저울에 올리는 경우, 올리지 않는 경우로 총 세 가지 경우가 가능하므로, 양팔저울을 이용한 무게 측정은 3 진법으로 나타낼 수 있다.
3 진법의 추는 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g, 729g, 등이고, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$ 이므로, 필요한 최소의 추는 6 개이다.

16. $\dfrac{cdb_{(4)}}{2} = aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2$ 일 때, $abcd_{(4)}$ 를 십진법의 수로 나타내어라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 108

해설

$aba_{(4)} = abc_{(4)} - 2 \rightarrow a = c - 2$,
a, b, c, d 는 모두 4 보다 작으므로 $c = 3$, $a = 1$,
$\dfrac{3db_{(4)}}{2} = 1b1_{(4)} = 1b3_{(4)} - 2$,
$\rightarrow 3db_{(4)} = 2 \times 1b1_{(}4)$,
$\rightarrow 7b - 4d = 14$, $b = 2$, $d = 0$,
$\therefore abcd_{(4)} = 1230_{(}4) = 108$

17. 0 부터 5 까지의 눈이 있는 정육면체 주사위를 세 번 던져, 나온 눈의 수를 순서대로 각각 x, y, z 라고 할 때, 6 진법의 수 $xyz_{(6)}$ 를 만들 수 있다. 이 수를 36 으로 나눈 나머지가 24 의 약수가 될 확률을 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{9}$

해설

$xyz_{(6)} = x \times 6^2 + y \times 6 + z$, 24 의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ 이다.

$x \times 6^2 + y \times 6 + z$ 에서 $x \times 6^2$ 부분은 항상 36 으로 나누어 떨어지므로, 나머지는 $y \times 6 + z$ 이다.

$\rightarrow 6y + z$ 가 24 의 약수가 될 확률을 구해 보면

$\rightarrow 6y + z = 1$, $(y, z) = (0, 1)$

$\rightarrow 6y + z = 2$, $(y, z) = (0, 2)$

$\rightarrow 6y + z = 3$, $(y, z) = (0, 3)$

$\rightarrow 6y + z = 4$, $(y, z) = (0, 4)$

$\rightarrow 6y + z = 6$, $(y, z) = (1, 0)$

$\rightarrow 6y + z = 8$, $(y, z) = (1, 2)$

$\rightarrow 6y + z = 12$, $(y, z) = (2, 0)$

$\rightarrow 6y + z = 24$, $(y, z) = (4, 0)$

따라서 y, z 가 0 에서 5 까지 나올 경우는 36 이므로

$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

18. 분수 $\frac{x}{y}$ 의 분모에 18 , 분자에 45 를 더해도 분수의 값은 변하지 않는다. x, y 의 최소공배수가 70 일 때, 자연수 x, y 를 각각 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 35$

▷ 정답 : $y = 14$

해설

$\frac{x}{y} = \frac{x + 45}{y + 18}$

$\rightarrow x \times (y + 18) = y \times (x + 45)$

$\rightarrow 18x = 45y \rightarrow 2x = 5y$

$70 = 2 \times 5 \times 7$ 이므로

$2x = 5y$ 를 만족하려면 $x = 35$, $y = 14$ 이다.

19. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때, $[[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]]$ 를 간단히 하여라.

[배점 6, 상중]

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$[[\frac{[p, p]}{[p, q]}, q], [\frac{[q, q]}{[p, q]}, p]]$

$= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]]$

$= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]]$ ($\frac{p}{[p, q]}, q$는 서로소)

$= [1, \ 1]$

$= 1$

20. 자연수 n 에 대하여 연속하는 5 개의 자연수의 곱을 $[n]$, n 의 약수의 개수를 $s(n)$ 로 정의한다. $\dfrac{s([n+1])}{s([n])} > 1$ 을 만족하는 10 보다 작은 자연수 n 을 모두 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : 1
▷ 정답 : 2
▷ 정답 : 3
▷ 정답 : 4
▷ 정답 : 5
▷ 정답 : 6
▷ 정답 : 8

해설

1 부터 13 까지 자연수를 소인수분해해보면
$1,\ 2,\ 3,\ 4 = 2^2,\ 5,\ 6 = 2\times3,\ 7,\ 8 = 2^3,$
$9 = 3^2,\ 10 = 2\times5,\ 11,\ 12 = 2^2\times3,\ 13$ 이다.
$s([1]) = 16,\ s([2]) = 30,\ s([3]) = 56\ s([4]) = 112,\ s([5]) = 144,\ s([6]) = 96,\ s([7]) = 120,$
$s([8]) = 112, s([9]) = 128$
따라서, $\dfrac{s([n+1])}{s([n])} > 1$ 인 경우가 되는 n 의 값은
1, 2, 3, 4, 6, 8 이다.

21. 어떤 자연수 x 를 소인수분해하였을 때, $x = a\times b\times c$ 이 된다. $(a+1)(b+1)(c+1) = 200$ 이 되는 세 자리 자연수 x 를 모두 구하여라. [배점 6, 상중]

▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : 108
▷ 정답 : 112

해설

$200 = 2^3\times5^2 = 2\times2\times2\times5\times5$,
$2\times2\times2\times5\times5$ 을 세 수의 곱으로 만들면,
$\rightarrow 2\times2\times50, 2\times4\times25, 2\times5\times20, 2\times10\times10, 4\times5\times10, 5\times5\times8$
따라서,
순서쌍 $(a,b,c) = (1,1,49),\ (1,3,24),\ (1,4,19),$
$(1,9,9),\ (3,4,9),\ (4,4,7)$
$\rightarrow a\times b\times c = 49,\ 72,\ 76,\ 81,\ 108,\ 112$
$\therefore$ 세 자리 자연수 $x = 108, 112$

22. $2^a \times 3^b$ 의 약수의 개수가 6 개 일 때, $2^a \times 3^b$ 이 가장 작은 자연수가 되도록 하는 a, b 를 각각 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

자연수 A 가 $A = a^m \times b^n$ 으로 소인수분해될 때 (A 의 약수의 개수)는 $(m+1) \times (n+1)$ 개 이다.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 6 = (0+1) \times (5+1) \\ &= 6 \times 1 = (5+1) \times (0+1) \\ &= 2 \times 3 = (1+1) \times (2+1) \\ &= 3 \times 2 = (2+1) \times (1+1) \end{aligned}$$

이므로, (a, b) 의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두 (0, 5), (5, 0), (1, 2), (2, 1) 이다.

i)$(a, b) = (0, 5)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$ 이다.

ii) $(a, b) = (5, 0)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$ 이다.

iii) $(a, b) = (1, 2)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^1 \times 3^2 = 18$ 이다.

iv) $(a, b) = (2, 1)$ 일 때,

구하고자 하는 수는 $2^2 \times 3^1 = 12$ 이다.

따라서 i), ii)iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

23. 자연수 약수의 개수가 9 개인 어떤 수를 소인수분해했더니 $2^2 \times \square$ 가 되었다. $\boxed{}$ 안에 들어갈 가장 작은 수는 무엇인지 구하여라. [배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$

i) $9 = 8 + 1$

$2^2 \times \square = 2^8$

$\therefore\ \square = 2^6$

ii) $9 = 3 \times 3 = (2+1) \times (2+1)$ 일 때,

$2^2 \times \square = 2^2 \times a^2$ (단,a 는 2 가 아닌 소수이다.)

$\therefore\ a = 3,\ 5,\ 7, \cdots$

$\therefore\ \square = 9, 25, 49$

i), ii) 에서 가장 작은 수는 9 이다.

24. $2^5 \le N < 2^6$ 을 만족시키는 자연수 N 을 이진법의 수로 나타낼 때, 이진법으로 몇 자리의 수가 되는가? [배점 6, 상상]

① 6 자리 ② 5 자리 ③ 4 자리

④ 3 자리 ⑤ 2 자리

해설

$2^5 = 100000_{(2)}$, $2^6 = 1000000_{(2)}$ 이므로

$100000_{(2)} \le N < 1000000_{(2)}$

따라서 N 은 6 자리 수

25. 다음은 골드바흐가 생각해낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은?

보기

[골드바흐의 추측]
2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

[배점 6, 상상]

① $12 = 5 + 7$ ② $14 = 3 + 11$

③ $16 = 5 + 11$ ④ $18 = 7 + 11$

⑤ $20 = 9 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, $\cdots$ 이므로 골드바흐의 추측을 설명한 것이 아닌 것은 $20 = 9 + 11$ 이다.

26. 다음은 골드바흐가 생각해 낸 소수에 관한 추측이다. 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명하고 있는 식은?

보기

[골드바흐의 추측]
2 보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다.

[배점 6, 상상]

① $7 = 3 + 4$ ② $12 = 5 + 7$

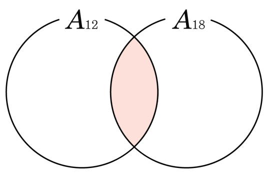
③ $14 = 5 + 9$ ④ $14 = 2 + 5 + 7$

⑤ $17 = 1 + 5 + 11$

해설

소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, $\cdots$ 이므로 골드바흐의 추측을 가장 잘 설명한 것은 $12 = 5 + 7$ 이다.

27. 집합 $A_k = \{x \mid x$는 k의 배수$\}$라고 하면 $A_{12} = \{x \mid x$는 12의 배수$\}$, $A_{18} = \{x \mid x$는 18의 배수$\}$이다. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합을 A_n 이라고 할 때, n 의 값을 구하여라.



[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

색칠한 부분은 A_{12}, A_{18} 의 교집합이다.
$A_{12} = \{x \mid x$는 12의 배수$\} = \{12, 24, 36, \cdots\}$,
$A_{18} = \{x \mid x$는 18의 배수$\} = \{18, 36, 54, \cdots\}$
이므로 $A_{12} \cap A_{18} = \{36, 72, 108, \cdots\}$ 이다.
$\{36, 72, 108, \cdots\}$ 를 조건제시법으로 나타내면 $\{x \mid x$는 36의 배수$\}$이므로 n 은 36 이다.

28. 자연수 k 의 모든 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라고 할 때, $(A_6 \cap A_8) \subset A_k$ 인 k 의 최솟값을 구하여라.

[배점 6, 상상]

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$A_6 \cap A_8$ 는 6 의 배수의 8 의 배수와 교집합이므로 6 과 8 의 공배수이다.
6 과 8 의 공배수는 24 이므로 A_k 는 24 의 배수의 집합이다.
따라서 $A_k = \{24, 48, 72, \cdots\}$ 이고 k 의 최솟값은 24 이다.